Funksiya tushunchasi, berilish usullari,grafigini nuqtalar bo'yicha yasash.

Funksiya va argument. Amaliyotda vaqt, tempera-tura, bosim, kuch, tezlik, yuz, hajm va hokazo miqdorlar (kattaliklar) bilan ish ko'rishga, ular orasidagi bog'lanish-larning xususiyatlarini o'rganishga to'g'ri keladi. Bunga ko'plab misollarni fizika, geometriya, biologiya va boshqa fanlar beradi. Jism o'tgan *S* masofaning t vaqtga, aylana C uzunligining *R* radiusga bog'liq ravishda o'zgarishi bunga oddiy misol.
Agar *x* o'zgaruvchi miqdor X sonli to'plamdan qabul qila oladigan bar bir qiymatga biror *f* qoida bo'yicha *y* o'zgaruvchi miqdorning *Y* sonli to'plamdagi aniq bir qiymati mos kelsa, *y* o'zgaruvchi *x* o'zgaruvchining *sonli funksiyasi* deb ataladi. *y* o'zgaruvchining *x* o'zgaruvchiga bog'liq ekanligini ta'kidlash maqsadida uni *erksiz o 'zgaruvchi* yoki funksiya, *x* o'zgaruvchini esa *erkli o 'zgaruvchi* yoki ai]gument deb ataymiz. *y* o'zgaruvchi o'zgaruvchining funksiyasi ekanligi $y = f(x)$ ko'rinishda belgilanadi.

Argument *x* ning *X* to'plamdan qabul qila oladigan barcha qiymatlar to'plami *f* funksiyaning *aniqlanish sohasi* deyiladi va *D(f)* orqali belgilanadi. *\f(x) * ;xє *D(f)}* to'plam *f* funksiyaning *qiymatlar sohasi (to 'plami)* deb ataladi va *E(f)* orqali belgilanadi.

Ixtiyoriy xє *D(f)* qiymatda funksiya faqat $y = b$ (o'z-garmas miqdor — *constanta), bєR* qiymatga ega bo'lsa, unga *X* to'plamda berilgan *doimiy fonksiya* deyiladi. Masalan, koordinatalar sistemasida *Ox* o'qqa parallel to'g'ri chiziqni ifodalovchi $y = 3$ funksiya $D(f) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$ da doimiydir.
1- m i s o 1. Agar $y = x^2$ funksiya *R* to'plamda berilgan bo'lsa, u holda $D(f) = R$ va $E(f) = R_+ \cup \{0\}$ bo'ladi.
2- m i s o 1. $y = x^2$ funksiya $D(f) = [-3; 4]$ da berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning qiymatlar sohasi $E(f) = [0; 16]$ dan iborat.

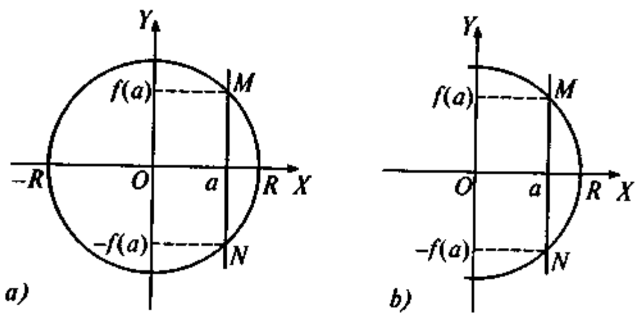
Funksiyani bo'laklarga ajratib berish. Aniqlanish sohasining turli qismlarida turli xil qoida bilan berilgan funksiyani *bo 'laklarga ajratib berilgan funksiya* (yoki *bo 'lakli berilgan funksiya)* deb ataymiz.
1 - m i s o 1. Jism harakatni boshlab, dastlabki t_1 vaqt davomida tekis tezlanuvchan (a_1 tezlanish bilan), so'ng t_2 vaqt davomida tekis sekinlanuvchan ($-a_2$ tezlanish bilan) harakat qilganlining *v* harakat tezligini *t* ning funksiyasi sifatida ifodalaymiz.
Yechish. 1) Jismning harakat boshidagi tezligi $v_0 = 0$, jism t_1 vaqt davomida tekis tezlanuvchan harakat qilgan: $v = v_0 + a_1 t = a_1 t,\ 0 \le t \le t_1$; 2) t_1 vaqt momentidagi tezligi $v_1 = a_1 t_1$; keying! t_2 vaqt davomida tekis sekinlanuvchan harakat qilgan: $v = v_1 - a_2 t = a_1 t_1 - a_2 t,\ t_1 \le t \le t_1 + t_2$. Shunday qilib,

$$v = \begin{cases} a_1 t, & 0 \le t \le t_1, \\ a_1 t_1 - a_2 t, & t_1 \le t \le t_1 + t_2. \end{cases}$$

Funksiya grafigini nuqtalar bo'yicha yasash. Biror X sonli oraliqda berilgan $y = f(x)$ sonli funksiya grafigi r ni «nuqtalar usuli bilan yasash uchun JSforaliqdan argu-mentning bir necha $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymati tanlanadi, funksiyaning ularga mos $f(x_1), ..., f(x_n)$ qiymatlari hisoblanadi, koordinatalar tekisligida

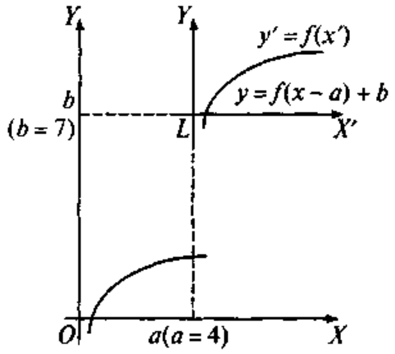
$$M(x_1; f(x_2)),\ ...,\ M(x_n; f(x_n))$$

nuqtalar belgilanadi va bunuqtalar ustidan silliq chiziq o'tkaziladi. Bu chiziq *f(x)* funksiya grafigini taqriban ifodalaydi.

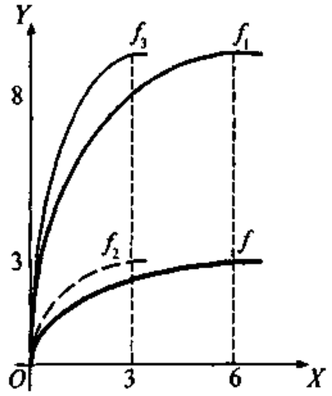


Funksiya grafiklarini almashtirish. Chiziqli funksiya grafigi. Kvadrat funksiya grafigi .

Funksiya grafigini almashtirish. 1) xOy koordinatalar sistemasi unda chizilgan y - $f(x)$ funksiya grafigi bilan birgalikda $x = a$, $y = b$ birlik qadar *parallel ko 'chirilgan* bo'lsin (45- rasm, a = 4, b = 7). 0(0; 0) koordinatalar boshi $L(a; b)$ nuqtaga ko'chadi. f grafikning obrazi yangi $X'LY$ sistemada $y' =f(x')$ orqali ifodalanadi. Bu oldingi xOy sistemaga nisbatan $y=f(x- a) + bg,a$ mos. Haqiqatan, biror $M(x_0; y_0)$ nuqta $f(x)$ grafikda yotgan va $y_0=f(x_0)$ bo'lsa, uning obrazi, ya'ni $M'(x_Q + a; y_0 + b)$ nuqta $y =f(x -a) + b$ grafigida yotadi. Chunki bu munosabatdagi x va y lar o'rniga $x_0 + a$, $y_0 + b$ lar qo'yilsa, $y_0 + b =f(x_0 + a- d) + b$ yoki $y_0 =f(x_0)$ tenglik qaytadan hosil bo'ladi. Shu kabi, agar M' nuqta $y =f(x -d) + b$ grafigida yotgan bo'lsa, uning proobrazi $y =f(x)$ grafigida yotadi.



47- rasm.



48- rasm.

1 - m i s o l. 47- rasmda $y = f(x)$ funksiya grafigini x = 4 va y = *1* birlik parallel ko'chirish orqali $y=f(x-4)+7$ funksiya grafigini yasash tasvirlangan.

2) C h o' z i s h. $M(x_0; y_0)$ nuqta f grafikda yotgan bo'lsin: $y_0 = f(x_0)$ Agar f grafik abssissalar o'qidan /≠O koeffitsient marta, ordinatalar o'qidan $k\neq$ 0 marta cho'zilsa, $y = lf\left(\frac{x}{k}\right)$ funksiya grafigi hosil bo'ladi. Unda $M(x_0; y_0)$ nuqtaning obrazi bo'lgan $M'(k\,x_0;\ ly_0)$ nuqta yotadi: $ly_0 = lf\left(\frac{kx_0}{k}\right)$ yoki $y_0=f(x_0)$.

Aksincha, M' nuqta $y = lf\left(\frac{x}{k}\right)$ da yotgan bo'lsa, M nuqta f grafikda yotadi. Demak, Ox o'qqa nisbatan l marta, Oy o'qqa nisbatan k marta cho'zish orqali $y=f(x)$ funksiya grafigidan $y = lf\left(\frac{x}{k}\right)$ funksiya grafigi hosil qilinadi.To'g'ri chiziqqa nisbatan -1 ga teng koeffitsient bilan cho'zish shu to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetriya bo'lga-nidan, $y=-f(x)$ funksiya grafigi $y=f(x)$ grafigini abssissalar o'qiga nisbatan simmetrik almashtirishdan, $y=f(-x)$ grafigi f grafikni ordinatalar o'qiga nisbatan, $y=-f(-x)$ grafik esa f ni koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik almashtirish bilan hosil qilinadi.

2- m i s o l. f funksiya grafigi bo'yicha $f_1(x) = 3f(x)$, $f_2(x)=f(2x), f_3(x)=3f(2x)$ funksiyalar grafiklarini yasaymiz (48- rasm).

Y e c h i s h. f_1 funksiya grafigi f grafikni Ox lar o'qidan l=3 koeffitsient bilan cho'zish, ya'ni f dagi nuqtalar ordinatalarini 3 marta cho'zish orqali, f_2 grafik f grafikni Oy o'qidanmarta cho'zish (ya'ni 2 marta qisqartirish, qisish), buning uchun f nuqtalari abssissalarini 2 marta qisqartirish orqali, f_3 grafigi esa f grafigini abssissalar o'qidan l= 3 marta uzoqlashtirish va ordinatalar o'qiga $k = \frac{1}{2}$

$$k = \frac{1}{2}$$

koeffitsient bilan yaqinlashtirish orqali yasaladi.

3 - m i s o l. $f(x)$ funksiyaning grafigidan foydalanib, $y=5f(3x+6)+1$ funksiya grafigini yasash tartibini keltiring.

Yechish. Funksiyani $y=5f(3(x+2))+1$ ko'rinishda yozamiz.

1) Koordinatalar boshini $L(-2;$ 0) ga o'tkazadigan parallel ko'chirishni;

2) Oy o'qidan k= 3 marta cho'zishni;

3) abssissalar o'qidan l= 5 koeffitsient bilan cho'zishni;

4) abssissalar o'qidan b - 1 birlik yuqoriga parallel ko'chirishni bajaramiz.

I z o h. Funksiya ifodasini boshqa ko'rinishga keltir-may, ishni $f(3x + 6)$ grafigini yasash bilan boshlash hammumkin edi.

Chiziqli funksiya grafigi. 1) l to'g'ri chiziq koordina-talar tekisligining birinchi va uchinchi choraklari va 0(0;0) koordinatalar boshidan o'tsin (50- rasm). Unda O nuqtaga nisbatan simmetrik $M(x_0; y_0)$, $M'(-x_0; -y_0)$ nuqtalarni va jV(l; *k)* nuqtani belgilaymiz. $\alpha = \angle lOx$— to'g'ri chiziq bilan abssissalar o'qining musbat yo'nalishi orasidagi o'tkir burchak, $k = \frac{y_0}{x_0} = \text{tg}\alpha > 0$ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti. ΔOAN va $\Delta OB'M'$ laming o'xshashligidan $\frac{k}{l} = \frac{y_0}{x_0}$ yoki $y_0 = kx_0$ bo'ladi. Shu kabi ΔOAN va $\Delta OB'M'$l aming o'xshashligidan $y_0 = kx_0$, $k > 0$ ni olamiz. l to'g'ri chiziqqa ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgan l to'g'ri chiziqni qaraylik. P nuqta *M*ga, *P'* nuqta *M'* ga simmetrik bo'lsin. $\frac{k}{l} = \frac{y_0}{-x_0} = \frac{-y_0}{x_0}$ proporsiyaga ega bo'lamiz. $y_0 = -kx_Q$ bo'ladi, bunda k = -tgα, α— o'tmas burchak. Shunday qilib, koordinatalar boshidan o'tuvchi va $k > 0$ da abssissalar o'qining musbat yo'nalishi bilan o'tkir burchak, $k < 0$ da esa o'tmas burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziq $y = kx$ funksiyaning grafigidan iborat.

2) $y = kx + I$ *chiziqli funksiya* grafigi $y = kx$ funksiya grafigini ordinata o'qi bo'yicha / birlik parallel ko'chirish bilan hosil qilinadi. Bundan bir xil k koeffitsientli chiziqli funksiyalarning grafiklari o'zaro parallel bo'lishi kelib chiqadi.Koordinata tekisligidagi *L(a; b)* nuqta orqali burchak koeffitsienti k ga teng bo'lgan faqat bitta to'g'ri chiziq o'tadi, bunda k — oldindan berilgan son. Uning tenglamasi $y = k(x - a) + b$. Chiziq $y = kx$ funksiya grafigini parallel ko'chirish bilan hosil qilinadi, bunda 0(0; 0) koordinatalar boshi *L(a; b)* nuqtaga o'tadi.To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientini topish uchun to'g'ri chiziqqa qarashli $M(x_1; y_1)$ va $N(x_2; y_2)$ nuqtalarning koordinatalari to'g'ri chiziq tenglamasiga qo'yilib, hosil bo'ladigan sistema yechiladi:

$$\begin{cases} y = k(x - x_1) + y_1, \\ y = k(x - x_2) + y_2, \end{cases} \Rightarrow k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (1)$$

$M(x_1; y_1)$ va $N(x_2; y_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqiar tenglamasi $y = k(x - x_1) + y_1$, munosabatga $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ifodani qo'yish bilan hosil qilinadi:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \quad \text{yoki} \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \qquad (2)$$

bunda $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.

1 - m i s o 1. *M(2;* -3) nuqtadan o'tuvchi va $y = 5x - 6$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz.

Yechish. Izlanayotgan to'g'ri chiziq $y = 5x - 6$ to'g'ri chiziqqa parallel, demak, uning burchak koeffitsienti ham *k*- 5. To'g'ri chiziq *M(2;* -3) nuqtadan o'tadi. Demak, uning tenglamasi

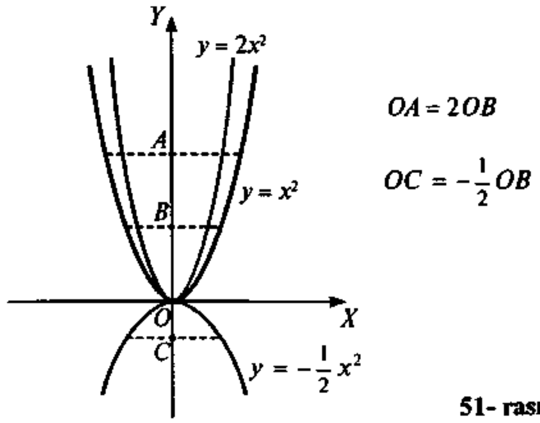
$y = 5(x - 2) - 3$ yoki $y = 5x - 13$.

2-misol. *M(-2;* -3)va N(4; -1) nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzamiz.

Yechish. (2) formuladan foydalanamiz:

$$\frac{y-(-3)}{-1-(-3)} = \frac{x-(-2)}{4-(-2)}, \text{ bundan } y = \frac{1}{3}x - 2\frac{1}{3}.$$

Kvadrat funksiya grafigi. $y = x^2$ funksiya bizga quyi sinflardan tanish. Uning grafigi, uchi koordinatalar boshi 0(0; 0) da va tarmoqlari yuqoriga yo'nalgan parabola (51- rasm). $y= ax^1$ funksiya grafigi esa x^2 parabolani abssis-salar o'qidan a koeffitsient bilan cho'zish ($|\alpha| > 1$ da) yoki qisish ($|a| < 1$ da) orqali hosil qilinadi. $a < 0$ da $y = ax^2$ parabola Ox o'qiga nisbatan simmetrik akslanadi. Ixtiyoriy $a \neq 0$ da $y - ax^2$ funksiya grafigi paraboladan iborat. $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ funksiya grafigini yasash maqsadida ifodani $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$ yoki $y = a(x\alpha)^2 + b$ ko'rinishga keltiramiz, bunda $-\alpha = \frac{b}{2a}$, $\beta = \frac{4ac-b}{4a}$. Bundan ko'rinadiki, $y- ax^2 + bx+ c$ funksiyaning grafigi $y= ax^2$



51- rasm.

parabolani *Oy* o'qqa nisbatan α qadar va *Ox* o'qqa nisbatan β qadar parallel ko'chirish orqali hosil qilinadi, bunda parabolaning 0(0; 0) uchi *L(a;* β) nuqtaga o'tadi.

Kasr chiziqli funksiya. Ifodasi modul ishorasiga ega funksiyalarning grafigi.

Kasr-chiziqli funksiya grafigi. Ikki chiziqli funk-siyaning nisbatidan iborat

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (1)$$

kasr-chiziqli ftmksiyani qaraymiz. Uning grafigi to'g'ri chiziq yoki giperbola bo'lishi mumkin:

1) agar c=0, $d \neq 0$ bo'lsa, (1) munosabat

$$y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$$

chiziqli funksiyaga aylanadi, uning grafigi to'g'richiziqdan iborat;

2) $c \neq 0,\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = m$ bo'lsa, $y = \frac{mcx+md}{cx+d} = m$ ga ega bo'lamiz. Bu holda (1) funksiya grafigi Ox o'qqa parallel bo'lgan va $M(-\frac{d}{c};\ m)$ nuqtasi chiqarib tashlangan $y = m$ to'g'ri chiziq bo'ladi;

3) $a \neq 0,\ \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$. Oldin $\frac{ax+b}{cx+d}$ kasrdan butun qism ajratamiz:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}} = \beta + \frac{k}{x-\gamma},$$

bunda

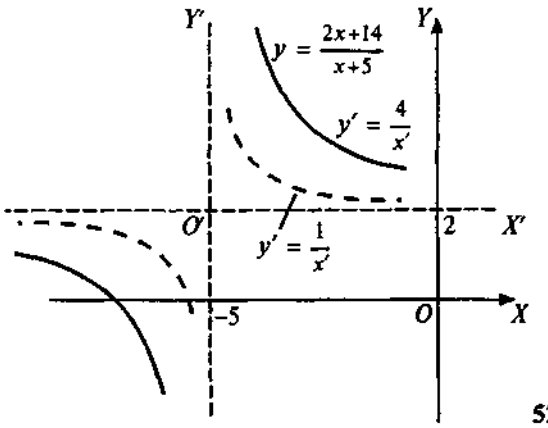
$$\beta = \frac{a}{c},\ \ k = \frac{bc-ad}{c^2},\ \ \gamma = -\frac{d}{c}. \qquad (2)$$

Bundan ko'rinadiki,

$$y = \frac{x+b}{cx+d}$$

funksiya grafigi $y = \frac{k}{x}$ funksiya grafigi (giperbola)ni parallel ko'chirishlar bilan hosil qilinadi, bunda koordinatalar boshi $L(\gamma,\ \beta)$ nuqtaga o'tadi. γ, β va k lar (2) formulalar bo'yicha topiladi.

1- m i s o l. $y = \frac{2x+14}{x+5}$ funksiya grafigini yasang (52- rasm).



52- rasm.

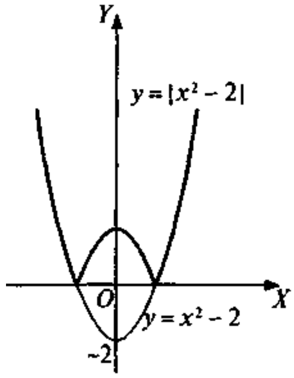
Yechish. Kasrdan butun qismini ajratamiz: $\frac{2x+14}{x+5} = 2 + \frac{4}{x+5}$, nda $k = 4,\ \gamma = -5,\ \beta = 2.$ $O'(-5;\ 2)$ nuqtadan yordamchi $O'x'$, $O'y'$ koordinatalar o'qlarini o'tkazamiz.Ularda $y = \frac{1}{x}$ funksiya grafigini, so'ng $y = \frac{k}{x}$ funksiya grafigini yasaymiz. Bu grafik xOy koordinatalar sistemasida $y = \frac{2x+14}{x+5}$ ning grafigi bo'ladi.

Ifodasi modul ishorasiga ega funksiyalarning grafigi.

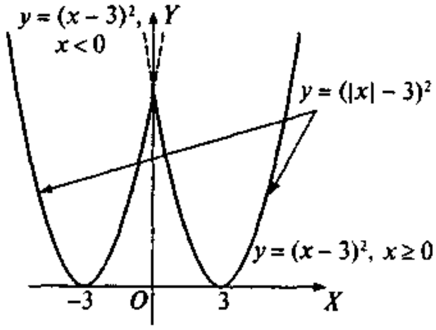
$$1)\ |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{agar } f(x) \geq 0 \text{ bo‘lsa,} \\ -f(x), & \text{agar } f(x) < 0 \text{ bo‘lsa,} \end{cases}$$

ekanini biz bilamiz. Bundan ko'rinadiki, $|f|$ grafigini yasash uchun oldin f grafigini yasash, so'ng lining $y \geq 0$ yarim tekislikdagi qismini o'z joyida qoldirib, $y < 0$ yarim tekislikdagi qismini esa Ox

o'qqa nisbatan simmetrik akslantirish kerak. 53- rasmda $y = \backslash x^2 - 2\backslash$ grafigini $y = x^1 - 2$ grafigidan foydalanib yasash tasvirlangan.



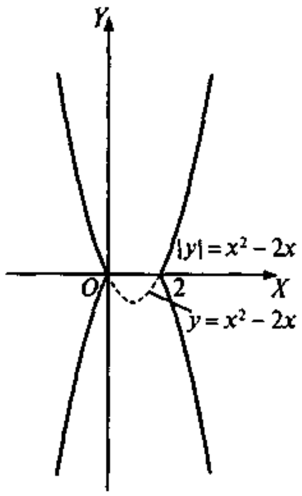
53- rasm.



54- rasm.

$$2)\ f(|x|) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0, \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

munosabatdan ko'rinadiki, $y = f(|x|)$ grafigi $f(x)$ funksiya grafigining $x \geq 0$ yarim tekisligidagi qismi hamda uning *Oy* o'qiga nisbatan simmetrik aksidan tashkil topadi. 54- rasmda $y = (|x| - 3)^2$ grafigini $y = (x-3)^2$ grafigidan foydalanib yasash tasvirlangan. 3) 55- rasmda $|y| = x^2 - 2x$ bog'lanish grafigini $y = x^2 - 2x$ grafigidan foydalanib yasash tasvirlangan.



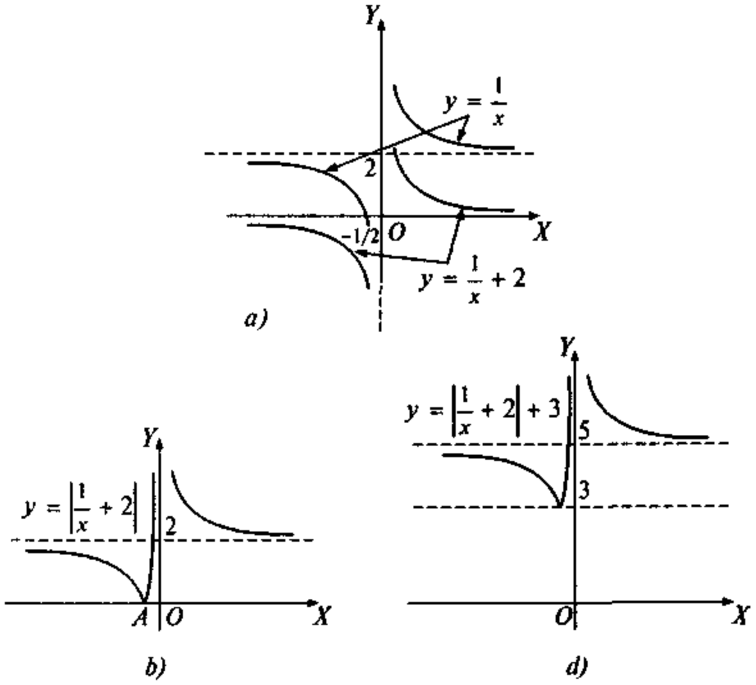
55- rasm.

1 - m i s o l 1. $y = \left|\frac{1}{x} + 2\right| + 3$ funksiya grafigini yasaymiz.

Y e c h i s h. a) Dastawal $y = \frac{1}{x}$ funksiya grafigini, so'ngra shu grafik bo'yicha

$$y = \frac{1}{x} + 2$$

grafigini yasaymiz(56- *a* rasm);



56- rasm.

b) x ning har qanday qiymatida $y = \left|\frac{1}{x} + 2\right| \ge 0$ Shunga ko'ra, $y = \frac{1}{x} + 2$ grafigining $-\frac{1}{2} < x < 2$ da Ox o'qi ostida turgan qismini Ox o'qiga nisbatan simmetrik akslantiramiz (56- *b* rasm). Bunda $x = -\frac{1}{y}$ qiymat $y=0$, ya'ni $\frac{1}{x} + 2 = 0$ bo'yicha topiladi; d) talab qilinayotgan $y = \left|\frac{1}{x} + 2\right| + 3$ grafikni yasash uchun $y = \left|\frac{1}{x} + 2\right|$ grafigi 3 birlik yuqoriga parallel ko'chiriladi (56- *d* rasm).

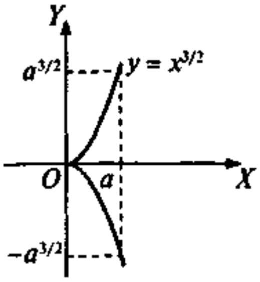
Darajali funksiya grafigi.

Darajali funksiya grafigi. α haqiqiy son va ixtiyoriy x musbat son uchun x^{α} soni har vaqt aniqlangan bo'ladi. $x<0$ va $\alpha=\frac{m}{n}$ bo'lganda $y<x^{\alpha}$ funksiya aniqlanmagan.

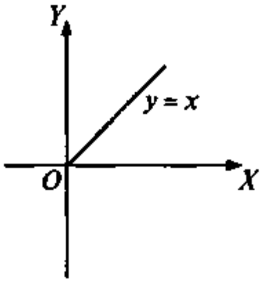
Biz $x>0$ hoi bilan shug'ullanamiz. Har qanday α haqiqiy son uchun $(0; +\infty)$ musbat sonlar to'plamida aniqlangan $y = x^{\alpha}$ funksiya mavjud. Unga α ko'rsatkichli *darajali funksiya* deyiladi, bunda x — darajaning asosi. Darajali funksiya $x=1$ da $y=1$ dan iborat *doimiy funksiyaga* aylanadi. Darajali funksiyaning xossalari haqiqiy ko'rsatkichli darajaning xossalariga o'xshashdir. Ulardan ayrimlarini esga keltiramiz.

1. Darajali funksiya barcha $x>O$ qiymatlarda aniqlangan.
2. Darajali funksiya $(0; +\infty)$ da musbat qiymatlar qabul qiladi.
3. $\alpha > 0$ da darajali funksiya $(0; 1)$ oraliqda monoton kamayadi, $[1; +\infty)$ da monoton o'sadi.

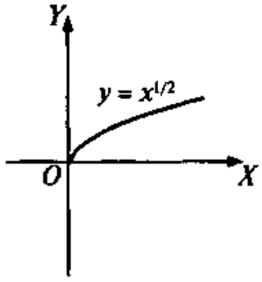
Darajali funksiya o'zining aniqlanish sohasida bir qiymatli, faqat α ko'rsatkich juft maxrajli qisqarmaydigan kasr son bo'lgan holdagina ikki qiymatli bo'ladi. Ko'p hollarda darajali funksiyaning ikki qiymatidan manfiy bo'lmagan (arifmetik) qiymati tanlab olinadi.



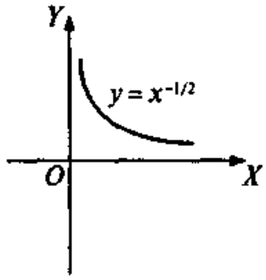
58- rasm.



59- rasm.



60- rasm.



61- rasm.

$x>0$ da α daraja ko'rsatkichi turlicha bo'lgan darajali funksiya grafiklari 58—61- rasmlarda tasvirlangan. 58- rasmda $y=x^{3/2}$ yarim kubik parabola tasvirlangan.

Juft va toq funksiyalar. Funksiya qiymatlarining o'zgarishi.

Juft va toq funksiyalar. Agar *X* to'plamning bar qanday *x* element! uchun $-x\in X$ bo'lsa, X to'plam 0(0; 0) nuqtaga nisbatan simmetrik to'nlam deviladi. Masalan, $(-\infty;+\infty)$, $[-2;2]$, $(-3;3)$, $(-8;-2)\cup[2;8)$ to'plamlarning bar biri 0(0; 0) nuqtaga nisbatan simmetrik to'plam-dir. (-3; 2) to'plam esa 0(0; 0) nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lmagan to'plamdir.Aniqlanish sohasi 0(0; 0) nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan to'plamda $y=f(x)$ funksiya uchun $\forall x\in B(f)$ larda $f(-x)=f(x)$ tenglik bajarilsa, *f(x)* funksiya *juft funksiya*, $f(-x) = -f(x)$ tenglik bajarilganda esa *toq funksiya* deyiladi. Masalan, $f(x) = 2x^2 + 3$ — juft funksiya, chunk! $f(-x) = = 2(-x)^2 + 3 = 2x^2 + 3 = f(x)$. Shuningdek, $y = |x|$, $y = x^4$ lar ham juft funksiyalardir.
$f(-x)^5 = -x^5$, demak, $y = x^5$ — toq funksiya. Umuman, x^{2n}, $n\in N$, funksiyalar juft, x^{2n-1}, $n\in N$, funksiyalar toq funksiyalardir. Ta'riflarga qaraganda toq funksiya grafigi koordinata boshiga nisbatan, juft funksiya grafigi esa ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik joylashadi. Juft va toq funksiya aniqlanish sohasi koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashadi.

1 - m i s o 1. $f(x)=x^7$ funksiyani $-4\le x\le 5$ va $-6\le x\le 6$ da simmetriklikka tekshiring.

Yechish. Funksiyaberilgan $[-4;5]$ oraliqkoordinatalar boshiga nisbatan simmetrik emas. Demak, funksiya ham bu sohada simmetrik emas. [-6; 6] oraliqda 0(0; 0) ga nisbatan simmetrik, $(-x)^7=-x^7$. Demak, bu sohada funksiya toq. Funksiyalarni juft-toqlikka tekshirishda quyidagi ta'kidlardan ham foydalanamiz:
a) *f* (x) funksiya Z>(*f*) da, *g(x)* ftmksiya D(g) da aniq-langan bo'lsin. Agar umumiy $x\in D(f)\cap D(g)$ aniqlanish sohasida *f*(x) va *g(x)* funksiya bir vaqtda juft (yoki toq) bo'lsa, ularning *(f+g)(x)* yig'indisi ham juft (toq) bo'ladi. Haqiqatan, $(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$;
$(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-(f+g)(x)$
b) ikkita juft (toq) funksiya ko'paytmasi juft funksiya, toq va juft funksiyalar ko'paytmasi esa toq funksiya bo'ladi. Haqiqatan, *f* va *g* funksiyalar juft bo'lsa, $(fg)(-x)=$
$=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=(fg)(x)$., Qolgan hollar ham shukabi isbotlanadi.

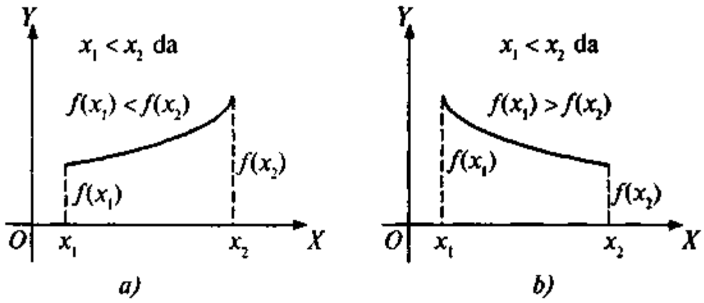
2- m i s o 1. $f(x)=a$, $a\in R$ doimiy funksiya juft funk-siyadir. Chunki *y=a* funksiya grafigi *Ox* o'qiga parallel va *Oy* o'qiga nisbatan simmetrik joylashgan to'g'ri chiziqdan iborat. Shunga ko'ra, agar *f* funksiya juft (toq) bo'lsa, a*f* funksiya ham juft (toq) funksiya bo'ladi. Agar *f* va g funksiyalar juft (toq) bo'lsa, a*f* + *bg* funksiya ham juft (toq) funksiya bo'ladi.
3- m i s o 1. $x^6 - 2x^2 + 6$ - juft funksiya, chunki x^6, $2x^2$ va 6 lar juft, $x^5 - 2x$ — toq funksiya, chunki x^5 va $2x$ — toq; $(x - 2)^2$ na toq, na juft, chunki uning yoyilmasi bir turli bo'lmagan (ya'ni juft va toq) fmksiyalar yig'indisi $x^2 - 4x+4$dan iborat. Keyingi xulosani yana quyidagicha ham isbotlash mumkin:

$$(-x-2)^2=(x+2)^2\neq(x-2)^2.$$

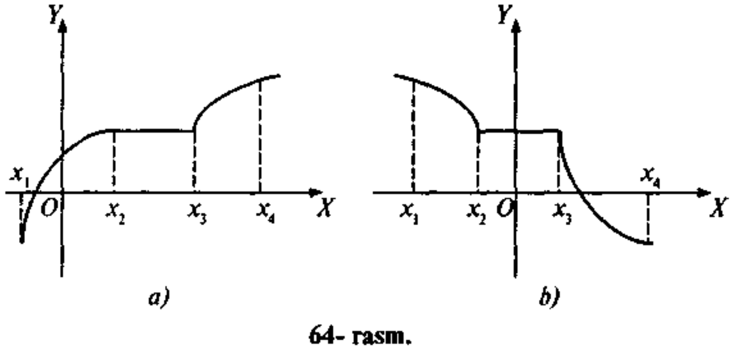
4- m i s o 1. $\frac{x^2-4}{x^6-2x^4+7}$ funksiya $f=x^2-4$ va $g=\frac{1}{x^6-2x^4+7}$ juft funksiyalarning ko'paytmasi sifatida juft funksiyadir.Agar *X* sonli to'plam koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lsa, u holda shu to'plamda berilgan *f* funksiyani $\varphi=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ juft funksiya va $\psi=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ toq funksiyalarning yig'indisi shaklida ifodalash mumkin:

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$$

2.Funksiya qiymatlarining o'zgarishi. Agar *X* to'p-lamda *x* argument qiymatining ortishi bilan *f* ftinksiyaning qiymatlari ham ortsa (kamaysa), funksiya shu to'plamda *o'suvchi (kamayuvchi) funksiya* deyiladi. Boshqacha aytganda, $x_1\in X$, $x_2\in X$, $x_1<x_2$ qiymatlarda $f(x_1)<f(x_2)$ bo'lsa, *f* funksiya *X* to'plamda o'suvchi, agar $f(x_1)>f(x_2)$bo'lsa, funksiya kamayuvchi bo'ladi (63- *a, b* rasm). Agar $x_1\in X$, $x_2\in X$, $x_1<x_2$ da $f(x_1)\le f(x_2)$(mos ravishda $f(x_1)\ge f(x_2)$) bo'lsa, *f* funksiyaga *X* to'plamda *noqat'iy*



63- rasm.



64- rasm.

o'suvchi (mos ravishda *noqat'iy kamayuvchi)* deyiladi. Bunday funksiyalar grafigi o'sish (kamayish) oraliqlaridan tashqari gorizontallik oraliqlariga ham ega bo'lishlari mumkin (64- *a, b* rasm).

X to'plamda o'suvchi yoki kamayuvchi funksiyalar shu to'plamda *monoton,* noqat'iy o'suvchi yoki noqat'iy kamayuvchi funksiyalar shu A'to'plamda *noqat'iy monoton funksiyalar* deyiladi.

$y = x^2$ **funksiya** $(-\infty;\ 0]$ oraliqda monoton, chunki unda kamayuvchi, $[0;\ +\infty)$ oraliqda ham monoton, unda o'sadi, lekin $(-\infty;\ +\infty)$ da monoton emas, chunki unda kamayuvchi ham emas, o'suvchi ham emas.

Funksiyalarning monotonligini isbotlashda quyidagi ta'kidlardan foydalanish mumkin:

1) agar *X* to'plamda *f* fiinksiya o'suvchi bo'lsa, har qanday *c* sonida *f*+ *c* funksiya ham *X* da o'sadi;

2) agar *f* funksiya Jf to'plamda o'suvchi va c>O bo'lsa, c*f* funksiya ham A'da o'sadi;

3) agar *f* funksiya ^ to'plamda o'ssa, -*f* ftmksiya unda kamayadi;

4) agar $f(f(x) \neq 0)$ funksiya *X* to'plamda o'ssa va o'z ishorasini saqlasa, $1/f$ funksiya shu to'plamda kamayadi;

5) agar *f* va *g* funksiyalar *X* to'plamda o'suvchi bo'lsa, ularning *f*+gyig'indisi ham shu to'plamda o'sadi;

6) agar *f* va g funksiyalar *X* to'plamda o'suvchi va nomanfiy bo'lsa, ularningj^ ko'paytmasi ham shu to'plamda o'suvchi bo'ladi;

7) agar *f* funksiya *X* to'plamda o'suvchi va nomanfiy, *n* esa natural son bo'lsa, *f*" funksiya ham shu to'plamda o'suvchi bo'ladi;

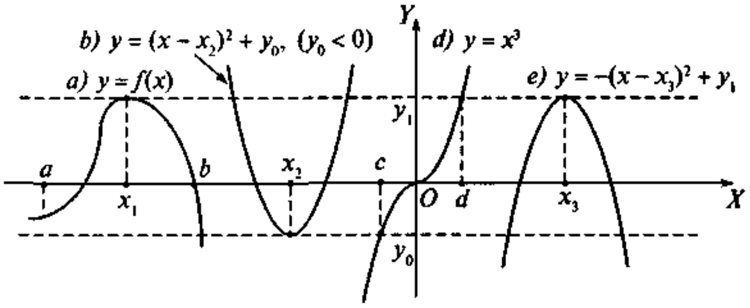
8) agar *f* funksiya *X* to'plamda o'suvchi, *g* funksiya esa *f* funksiyaning *E(f)* qiymatlari to'plamida o'suvchi bo'lsa, bu funksiyalarning $g \circ f$ kompozitsiyasi ham *X* da o'suvchi bo'ladi.

Bu ta'kidlar tengsizliklarning xossalari va funksiyalarning o'sishi va kamayishi ta'riflaridan kelib chiqadi. Masalan, $x_1 \in X,\ x_2 \in X,\ x_1 < x_2$ **da** $f(x_1) < f(x_2),\ g(x_1) < g(x_2)$ bo'lsin. Tengsizliklarning e)xossasiga mufoviq $f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$" ga ega bo'lamiz. Bu esa *f*+*g* funksiyaning X da o'suvchi bo'lishini ko'rsatadi.

1-mi sol. $f = \dfrac{1}{x^6+4x^3+1}$ funksiyaning $[0;\ +\infty)$ yarim o'qda kamayuvchi ekanini isbot qilamiz.

Yechish. *y*=*x* funksiya $[0;\ +\infty)$ yarim o'qda nomanfiy va o'suvchi. 2) va 7) ta'kidlarga ko'ra, x^6 va $4x^3$ funksiyalar ham shu yarim o'qda o'sadi. U holda 1) va 5) ta'kidlarga ko'ra $x^6 + 4x^3 + 1$ funksiya $[0;\ +\infty)$ da o'sadi, 4) ta'kidga ko'ra $\dfrac{1}{x^6+4x^3+1}$ funksiya kamayadi.

Agar funksiya $[a;\ x_1]$ da o'sib, $[x_1;\ b]$ da kamayuvchi bo'lsa, uning x_1 **dagi** $f(x_1)$ qiymati $[a;\ b]$ dagi qolgan barcha qiymatlaridan katta bo'ladi (65- *a* rasm).



65- rasm.

Masalan, $y = -(x - x_3)^2 + y_1$ funksiya $(-\infty; +\infty)$ da eng katta qiymatga erishadi, $y_{\text{eng katta}} = y_1$ (65- *e* rasm). Aksincha, $y = (x - x_2)^2 + y_0$ funksiya $(-\infty;\ x_2]$ oraliqda kamayib, $[x_2;\ +\infty)$ da o'sadi (65- *b* rasm). Uning x_2 dagi y_0 qiymati $(-\infty; +\infty)$dagi qolgan barcha qiymatlaridan kichik: $y_{\text{eng kichik}} = y_0$. 65- *a* rasmda grafigi $y=y_0$ va $y=y_1$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan *f(x)* funksiya tasvirlangan. 65- *b* rasmda parabolaning tar-moqlari yuqoriga cheksiz yo'nalgan: $y = +\infty$ yoki $y \to +\infty$. Bu funksiya yuqoridan chegaralangan emas, quyidan $y = y_0$ to'g'ri chiziq bilan chegaralangan. Shu kabi, 65- *e* rasmda tasvirlangan fiinksiya yuqoridan $y=y_1$ bilan chegaralangan, $y = x^3$ funksiya esa (65- *d* rasm) yuqoridan ham, quyidan ham chegaralangan emas. Lekin $[c;\ d]$ oraliqda bu funksiya $y = y_1$ va $y = y_0$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan bo'ladi.Agar shunday *M* haqiqiy soni mayjud bo'lib, barcha $x \in X$ sonlari uchun $f(x) \geq M$ (mos ravishda $f(x) \leq M$) tengsizlik bajarilsa, *f* funksiya *X* to'plamda *quyidan chegaralangan (yuqoridan chegaralangan)* deyiladi. Agar funksiya *X* to'plamda ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u shu to'plamda *chegaralangan* deyiladi.

2-mi sol. $y = -x^2$ funksiyani qafraymiz. Barcha $x \in (-\infty; +\infty)$ sonlari uchunbo'lgani $-x^2 \leq 0$ uchun bu funksiya $(-\infty; +\infty)$oraliqda yuqoridan chegaralangandir.

3- m i s o l. $y = x^2$ funksiyaoraliqda $(-\infty; +\infty)$ quyidan chegaralangan funksiyadir, chunki barcha $x \in (-\infty; +\infty)$ sonlari uchun $y(x) = x^2 \geq 0$ tengsizlik bajariladi.

4- m i s o l. $y = x$ funksiyaoraliqda $(0;\ 1)$ quyidan 0 soni bilan, yuqoridan esa 1 soni bilan chegaralangan ekanini ko'rish qiyin emas. Demak, bu funksiya $(0;\ 1)$ oraliqda chegaralangandir.

Agar ixtiyoriy *M* haqiqiy soni uchun, shunday bir $x \in X$ son topilib, $f(x) < M$ $(f(x) > M)$ tengsizlik bajarilsa, f(x) funksiya A'to'plamda quyidan (mos ravishda, yuqoridan) chegaralanmagan deyiladi.

Agar *f* funksiya X to'plamda yo quyidan, yo yuqoridan, yoki bar ikki tomondan chegaralanmagan bo'lsa, bu funksiya X to'plamda chegaralanmagan funksiya deyiladi.

Davriy funksiya. Teskari funksiya.

Davriy funksiya. Tabiatda va amaliyotda ma'lum bit Tvaqt o'tishi bilan qaytadan takrorlanadigan jarayonlar uchrab turadi. Masalan, har T= 12 soatda soat mili bir marta to'liq aylanadi va oldin biror t vaqt momentida qanday o'rinda turgan bo'lsa, keying! $t+ T$, $t+2T$, umuman, $t+kT, k\in Z$ vaqt momentlarida yana shu o'ringa qaytadi. Quyosh bilan Yer orasidagi masofa $T=1$ yil davomida o'zgaradi, ikkinchi yilda o'zgarish shu ko'rinishda takrorlanadi.

Umuman, shunday T soni mavjud bo'lsaki, $y =f(x)$ funksiyaning D(f) aniqlanish sohasidan olingan har qan-day x uchun $x + T$, $x - T$ sonlari ham $D(f)$ ga tegishli bo'lsa va f(x) $=f(x+T) =f(x-T)$ tengliklar bajarilsa, f funk-siya *dawiy funksiya,* T son shu funksiyaning *davri,* eng kichik musbat davr esa funksiyaning *asosiy davri* deyiladi.

1-teorema. ***Agar T soniffimksiyaning davri bo'lsa, -Tham uningdavri bo'ladi. Agar* T, *va* T_2 *lar f funksiyaning davrlari bo'lsa,* T_t+ T_2 *ham shu flmksiyaning davri bo'ladi.***

I shot. $-T$ soni f funksiyaning davri ekani ta'rif bo'yicha $f(x) =f(x- T) =f(x+ T)$ tenglikning bajarilayotganligidan kelib chiqadi. T, + T_2 ning davr ekani shu kabi isbotlanadi: $f(t+ (\text{T}, + T_2)) =f(t + T_1 + T_2) =f(t + \text{r},) =f(t), f(t - (T_1+T_2))=f(t-T_t -T_2) =f(t-T_t) =f(t)$.

N at ij a. ***Agar T son f funksiyaning davri bo'lsa, kT son ham uning davri bo'ladi, bunda k — butun son.***

I s b o t. Matematik induksiya metodidan foydalana-miz. k= 1 da teorema to'g'ri: $kT= T$, Tesa shart bo'yicha davr. Agar k T funksiyaning davri bo'lsa, 1-teoremaga asosan, $kT+ T= (k+$ l)Tham davr. U holda induksiya bo'yicha barcha k butun sonlarda kT lar funksiyaning davri bo'ladi.

2-teorema. ***Agar T soni ffunksiyaning asosiy davri bo'lsa, funksiyaning qolgan barcha davrlari Tga bo'linadi.***

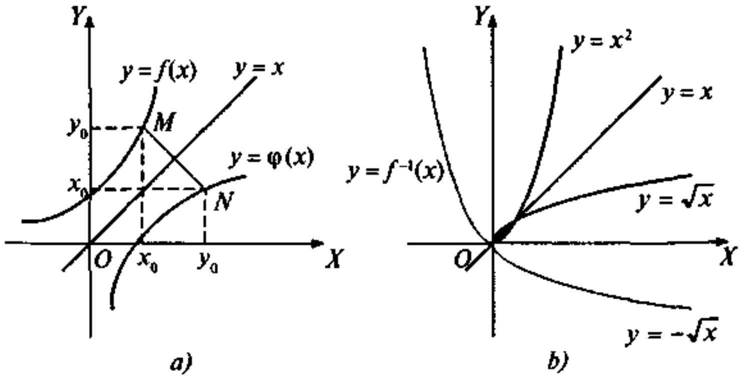
I s b o t. Isbotni musbat davrlar uchun ko'rsatish yetarli. T soni funksiyaning asosiy davri, T, esa uning ixtiyoriy musbat davri bo'lsin. T_1 ning T ga bo'linishini ko'rsatamiz. Aksincha, T_1 soni T ga bo'linmaydi, deb faraz qilaylik. U holda r, = $kT+ m$ ga ega bo'lamiz, bunda $k\in N,\ 0 < m < T$. Lekin T va 7, sonlari davr bo'lgani uchun $m=T_1-kT$ soni ham davr bo'ladi (1- teoremaga muvofiq). 0 < m < T ekani va m soni davr bo'lganidan T soni asosiy davr bo'la olmaydi. Zidlik hosil bo'ldi. Demak, faraz noto'g'ri. Bundan ko'rinadiki T_1 son T ga bo'linadi. Shu bilan teorema isbot bo'ldi.

Teskari funksiya. Agar $b=f(a)$ tenglikni qanoatlantiruvchi $(a; b)$ qiymatlar jufti $a = \varphi(b)$ tenglikni ham qanoatlantirsa, aksincha $a=\varphi(b)$ ni qanoatlantiruvchi shu juft $b =f(d)$ ni ham qanoatlantirsa, $y = f(x)$ va $y =\varphi(x)$ funksiyalar *o'zaro teskarifunksiyalardeyiladi.* Bu ikki funksiyadan ixtiyoriy birini *to 'g'rifunksiya,* ikkinchisini esa birinchisiga nisbatan *teskari funksiya* deb olish mumkin, f funksiyaga teskari funksiya f^{-1} orqali belgilanadi:

$$f^{-1}(x) = g(x) \text{ va } g^{-1}(x) = f(x).$$

To'g'ri funksiya $y=f(x)$ bo'lsin. Uni x ga nisbatan yechib, x=φ(x) ko'rinishga keltiramiz. $y=f(x)$ va $x=\varphi(y)$ -teng kuchli munosabatlar *bitta grafik* bilan tasvirlanadi (67- *a* rasm). Odatga ko'ra, funksiyani y orqali, argumentni x orqali belgilasak, $x = \varphi(y)$ bog'lanishda x va y larni almashtirib, ta'rifda ko'rsatilganidek, y = φ(x) yozuvni olamiz. Bu holda $f$grafigida yotgan bar bir $M(x; y)$ nuqta $y = x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan o'ziga simmetrik holatda φ grafigida yotgan $N(y; x)$ nuqtaga o'tadi. Umuman, o'zaro teskari f(x) va φ(x) funksiyalar grafiklari $y = x$ bissektrisaga nisbatan simmetrik joylashadi. Lekin har qanday funksiya teskari funksiyaga ega bo'lavermaydi. Masalan, $y = x^2$ funksiya bo'yicha funksional bog'lanish bo'lmagan (har bir y> 0 qiymatga x ning ikki qiymati mos keladigan) $x = \pm\sqrt{y}$ munosabatga ega bo'lamiz. Lekin

$y = x^2,\ 0 \le x < +\infty$ va $x = +\sqrt{y}$ yoki $y = x^2,\ -\infty < x \le 0$ va $x = -\sqrt{y}$ lar o'zaro teskari bog'lan ishlardir. $x = \sqrt{y}$ ni (harflarni almashtirib) $y = \sqrt{x}$ ko'rinishda yozamiz. Ularning grafiklari 67- *b* rasmda tasvirlangan. Agar X to'plamga qarashli $x_1 \ne x_2$ qiymatlarda funksiyaning mos qiymatlari $f(x_1) \ne f(x_2)$ bo'lsa, f funksiya X to'plamda *teskarilanuvchi funksiya* deyiladi.



67- rasm.

Agar *f(x)* funksiya *X* to'plamda *monoton* bo'lsa, u holda *y = f(x)* funksiya teskarilanuvchi funksiya bo'ladi. Haqiqatan, *f* funksiya *X* da o'suvchi bo'lsin. U holda $x_1 < x_2$ **larda** $f(x_1) < f(x_2)$, **ya'ni** $f(x_1) \neq f(x_2)$ bo'ladi. Bun-day hoi *f* funksiya *X* to'plamda kamayuvchi bo'lganda ham o'rinli. *f* funksiyaning monotonligidan unga tes-kari f^{-1} funksiyaning mavjudligi kelib chiqadi. Agar *f* funksiya *[a; b]* oraliqda o'ssa (yoki kamaysa) va uzluksiz bo'lsa, u $[f(a);\ f(b)]$ oraliqda (kamayuvchi bo'lganda $[f(b);\ f(a)]$ oraliqda) f^{-1} teskari funksiyaga ega bo'ladi.

Ko'rsatkichli funksiya va uning xossalari.

Irratsional ko'rsatkichli daraja. $a>0$, $a\neq 1$ soni va $x>0$ irratsional son berilgan bo'lsin. r_n ratsional sonlar x ga kami bilan, s_m ratsional sonlar ortig'i bilan (o'nli) yaqinlashsin, $r_n<x<s_m$, $n, m\in N$. U holda $a>1$ da $a^{r_n}<x<a^{s_m}$ bo'ladi. Bu esa barcha a^{r_n} sonlarning A to'plami a^{s_m} sonlar B to'plamining chap tomonida yotishini va bu to'p-lamlarni hech bo'lmasa bitta son ajratishini bildiradi. Bu son irratsional ko'rsatkichli a^x darajaning qiymati sifatida qabul qilinadi. $0<a<1$ holi ham shunday qaraladi. Faqat bunda A va B to'plamlarning rollari almashadi. Irratsional ko'rsatkichli a^x darajaning *xossalari* ratsional ko'rsatkichli darajaning xossalariga o'xshash *(a, b* lar musbat, α va β lar haqiqiy sonlar):

1) $(ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha$; 2) $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha=\frac{a^\alpha}{b^\alpha}$; 3) $a^\alpha a^\beta=a^{\alpha+\beta}$;

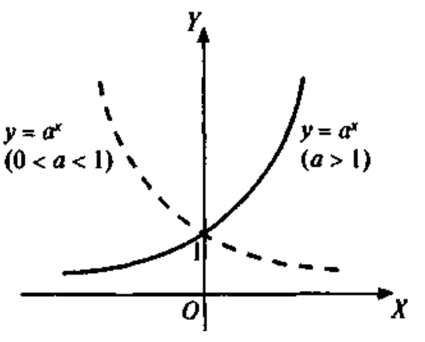
4) $\frac{a^\alpha}{b^\beta}=a^{\alpha-\beta}$; 5) $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$.

Darajalarni taqqoslashda ushbu ta'kiddan ham foydalaniladi:Agar α>l va $m\in N$ bo'lsa, $a^m>1$ yoki $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}>1$, shu kabi $a>1$ va ixtiyoriy $r>0$ da $a^r>1$ bo'ladi. Agar $a>1$, $r<s$ bo'lsa, $a^r<a^s$ bo'ladi. Haqiqatan, $a^s=a^r\cdot a^{s-r}>a^r\cdot 1=a^r$. Aksincha, $a>1$ va $0<a^r<a^s$ **bo'lsa,** $r<s$ bo'ladi (isbot qiling). Shuningdek, $0<a<1$ va $r<s$ bo'lgan holda $a^r>a^s$ bo'lishi ham shu kabi isbotlanadi.

Ko'rsatkichli fiinksiya va lining xossalari. $a>0$, $a\neq 1$ bo'lsin. $f(x)=a^x$ tenglik bilan aniqlangan fiinksiya *a* asosli *ko 'rsatkichli funksiya* deyiladi. Bu funksiya barcha haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan, $D(f)=R$, chunki $a>0$ bo'lganda a^x daraja barcha $x\in R$ uchun ma'noga ega. x ning istalgan haqiqiy qiymatida $a^x>0$ bo'lgani uchun va ixtiyoriy $b>0$ sonda $a^x=b$ bo'ladigan birginasoni $x\in R$ mavjud bo'lgani uchun $E(f)=R_+$ bo'ladi.

Xossalari:

1) $a>1$ bo'lsa, $f(x)=a^x$ funksiya R da o'sadi. $0<a<1$ bo'lsa, $f(x)=a^x$ funksiya R da kamayadi. Isbot. a>l holni qarash bilan cheklanamiz. a >1 va $\alpha<\beta$ bo'lsin, bu yerda α, β sonlari ixtiyoriy haqiqiy sonlar. U holda $\beta-\alpha>0$, $a>1$ bo'lgani uchun $a^{\beta-\alpha}>a^0$ yoki $a^{\beta-\alpha}>1$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan, $a^{\beta-\alpha}\cdot a^\alpha>1\cdot a^\alpha$ yoki $a^\beta>a^\alpha$ hosil bo'ladi. Demak,dan $\alpha<\beta$ ekani $a^\alpha<a^\beta$ kelib chiqadi. Bu esa a^x funksiya o'suvchi ekanligini bildiradi.



70- rasm.

70- rasmda $y=a^x$ ko'rsatkichli funksiyaning sxematik grafigi tasvirlangan. Agar $a>1$ bo'lsa, $x\to+\infty$ da cheksiz a^x ortadi, $x\to-\infty$ da *(f* nolgacha kamayadi. Demak, a^x grafigi y - 0 to'g'ri chiziqqa tomon cheksiz yaqinlashadi, ya'ni *Ox* o'qi funksiya grafigining *gorizontal asimptotasi.* Shu kabi $0<a<1$ bo'l-ganda, a^x funksiya $+\infty$ dan 0 gacha kamayadi, *Ox* o'qi — gorizontal asimptota;

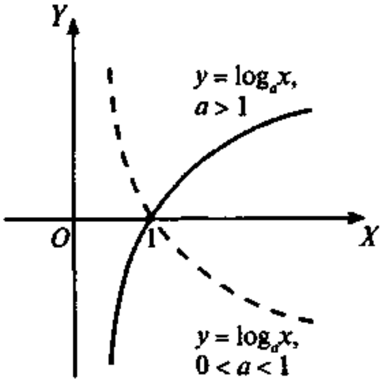
2) *f* funksiya juft ham, toq ham emas. Haqiqatan,

$$f(-x)=a^{-x}=\frac{1}{a^x}\neq\begin{cases}a^x,\\-a^x;\end{cases}\quad f(-x)\neq\begin{cases}f(x),\\-f(x);\end{cases}$$

2) *f* davriy funksiya emas, chunki ixtiyoriy $T\neq 0$ da $a^x\neq a^{x+T}$; 4) x ning hech qanday qiymatida a^x nolga aylanmaydi;5) *funksionallik xossasi*: har qanday x va z da $f(x+z)=f(x)\cdot f(z)$ tenglik o'rinli. Chunki $a^{x+z}=a^x\cdot a^z$. Xuddi shunday $f(x)/f(z)=f(x-z)$ ekanligi isbotlanadi.

Logarifmlar. Logarifmik funksiya.

Logarifmlar. Logarifinik funksiya. $a>0,\ a\neq 1$ bo'lsin. N sonining a asos bo'yicha *logarifmi* deb, N sonini hosil qilish uchun a sonini ko'tarish kerak bo'lgan daraja ko'rsatkichiga aytiladi va $\log_a N$ bilan belgilanadi. Ta'rifga ko'ra, $a^x = N\ (a>0,\ a\neq 1)$ tenglamaning x yechimi $x=\log_a N$ sonidan iborat. Ifodaning logarifmini topish amali shu ifodani *logarifmlash,* berilgan logarifmiga ko'ra shu ifodaning o'zini topish esa *potensirlash* deyiladi. $x=\log_a N$ ifoda potensirlansa, qaytadan $N=a^x$ hosil bo'ladi. $a>0,\ a\neq 1$ va $N>0$ bo'lgan holda $a^x=N$ va $\log_a N=x$ tengliklar teng kuchlidir.Shu tariqa biz o'zining aniqlanish sohasida uzluksiz va monoton bo'lgan $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$ funksiyaga ega bo'lamiz. Bu funksiya *a asosli logarifmikfunksiya* deyiladi. $y=\log_a x$ funksiya $y=a^x$ funksiyaga teskari funksiyadir.Uning grafigi $y=a^x$ funksiya grafigini $y=x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirish bilan hosil qilinadi (71-rasm). Logarifmik funksiya ko'rsatkichli funksiyaga teskari funksiya bo'lganligi sababli, uning xossalarini ko'rsatkichli funksiya xossalaridan foydalanib hosil qilish mumkin. Jumladan, $f(x)=a^x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)=\{-\infty<x<+\infty\}$, o'zgarish sohasi $E(f)=\{0<y<+\infty\}$ edi. Shunga ko'ra $f(x)=\log_a x$ funksiya uchun $D(f)=\{0<x<+\infty\}, E(f)=\{-\infty<y<+\infty\}$ bo'ladi. $a>1$ Logarifmlar. Logarifmik funksiya.da $\log_a x$ funksiya (0; +∞) nurda uzluksiz, o'suvchi, $0<x<1$ da manfiy, $x>1$ da musbat, $-\infty$ dan $+\infty$ gacha o'sadi. Shu kabi $0<a<1$ da funksiya $(0;\ +\infty)$ da uzluksiz, $+\infty$ dan 0 gacha kamayadi, $0<x<1$ oraliqda musbat, $x>1$ da manfiy qiymatlarni qabul qiladi, Ordinatalar o'qi
$\log_a x$ funksiya uchun *vertikal asimptota.*



71- rasm.

Logarifmik funksiyaning qolgan xossalarini isbotlashda ushbu *asosiy logarifmik ayniyatdan* ham foydalaniladi:

$$a^{\log_a N} = N\ \ (N>0,\ a>0,\ a\neq 1. \qquad (1)$$

(1) ayniyat $a^x=N$ tenglikka $x=\log_a N$ ni qo'yish bilan hosil qilinadi. O'zgaruvchi qatnashgan $a^{\log_a x}=x$ tenglik x ning $x>0$ qiymatlaridagina o'rinli bo'ladi. $x\leq 0$ da $a^{\log_a x}=x$ ifoda ham o'z ma'nosini yo'qotadi. $y=x$ va $y=a^{\log_a x}$ munosabatlar o'rtasidagi farqni 72- rasmdan tushunish mumkin.

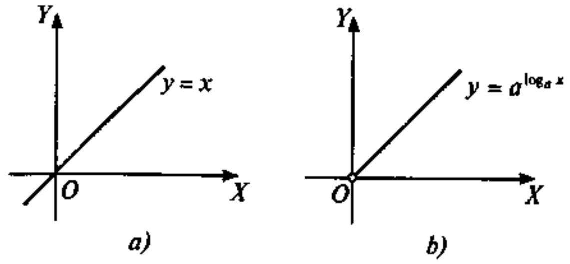
1) $\log_a 1=0$, chunki $a^0=1$;
2) $\log_a a=1$, chunki $a^1=a$;
3) $\log_a N = \dfrac{\log_c N}{\log_c a}\ (c>0,\ c\neq 1).$ (2)

Bu tenglik $N=a^c$ tenglikka $N=c^{\log_c N}$, $a=c^{\log_c a}$, $c=\log_a N$ larni qo'yish va almashtirishlarni bajarish orqali hosil bo'ladi;

4) $\log_a(NM)=\log_a N+\log_a M$. (3)

Haqiqatan, $NM=a^{\log_a N}\cdot a^{\log_a M}=a^{\log_a N+\log_a M}$. Ikkinchi tomondan, $NM=a^{\log_a NM}$. Tengliklarning o'ng qismlari tenglashtirilsa, (3) tenglik hosil bo'ladi. Agar Nva M bir vaqtda manfiy bo'lsa, u holda:

$$\log_a(NM) = \log_a|N| + \log_a|M|,$$



72- rasm.

5) $\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$. (4) Haqiqatan, $N \cdot \frac{1}{N} = 1$ tenglikni logarifmlasak:

$\log_a\left(N \cdot \frac{1}{N}\right) = \log_a 1$ yoki $\log_a N + \log_a \frac{1}{N} = 0$, bundan (4) tenglik hosil bo'ladi;

6) $\log_a \frac{N}{M} = \log_a N - \log_a M$. (5)

Haqiqatan, $\log_a \frac{N}{M} = \log_a N + \log_a \frac{1}{M} = \log_a N - \log_a M$;

7) $\log_a N^\beta = \beta \log_a N$, β – haqiqiy son. (6)

Haqiqatan, $x = \log_a N^\beta$ va $y = \log_a N$ bo'lsin. Ta'rifga ko'ra $N^\beta = a^x$ va $N = a^y$ yoki $N^\beta = a^{\beta y}$. Bulardan $a^x = a^{\beta y}$ yoki $x = \beta y$ va (6) tenglik hosil bo'ladi;

8) $\log_{a^\beta} N = \frac{1}{\beta} \log_a N$. (7) Haqiqatan, a^β asosdan a asosga o'tilsa,

$$\log_{a^\beta} N = \frac{1}{\log_a a^\beta} \cdot \log_a N = \frac{1}{\beta \log_a a} \log_a N = \frac{1}{\beta} \log_a N;$$

9) agar $a > 1$ bo'lsa, $M < N$ dan $\log_a M < \log_a N$ kelib chiqadi (va aksincha). Haqiqatan, $(M < N) \Rightarrow (a^{\log_a M} < a^{\log_a N}) \Rightarrow$ (darajaning xossasi) $(\log_a M < \log_a N)$ (va aksincha). Shu kabi, agar $0 < a < 1$ bo'lsa, $\log_a M < \log_a N$ bo'lganda $M > N$ bo'ladi (va aksincha);

10) agar $\log_a M = \log_a N$ bo'lsa, $M = N$ bo'ladi (va aksincha).

Haqiqatan, $(\log_a M = \log_a N) \Rightarrow (a^{\log_a M} = a^{\log_a N}) \Rightarrow (M = N)$.

Ko'rsatkichli va logarifmik ifodalarni ayniy almashtirish.

Ko'rsatkichli va logarifmik ifodalarni ayniy almashti-rishlar. Oldingi bandlarda logarifmning va logarifmik funksiyaning, shuningdek, darajaning va ko'rsatkichli funksiya-ning xossalari bilan tanishgan edik. Bu xossalardan logarifmik va ko'rsatkichli ifodalarni shakl almashtirishlarda foy-dalaniladi.

1 - m i s o 1. $3^{2+\log_3 2}$ni hisoblang.

Yechish. $3^{2+\log_3 2} = 3^2 \cdot 3^{\log_3 2} = 9 \cdot 2 = 18.$

2- mi sol. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 0,$

$c > 0)$ tenglikni isbotlang.

I s b o t. Logarifmning $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$ $(a > 0,\ a \neq 1,$

$b > 0,\ p \in R)$ xossasidan foydalansak, $\log_b a \cdot \log_b c =$

$\log_b a \cdot \log_b c$ tenglikdan $\log_b(a^{\log_b c}) = \log_b(c^{\log_b a})$ teng-

likni hosil qilamiz. Logarifmik funksiyaning monotonlik xossasidan $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ ekanligi kelib chiqadi.

3- m i s o 1. $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$ ifodani soddalashtiring. Yechish. $a^{\sqrt{\log_a b}}$ ifodada shakl almashtirish bajaramiz:

$$a^{\sqrt{\log_a b}} = a^{\frac{\log_a b}{\sqrt{\log_a b}}} = (a^{\log_a b})^{\frac{1}{\sqrt{\log_a b}}} = b^{\frac{1}{\sqrt{\log_a b}}} = b^{\sqrt{\log_b a}}.$$

Demak, $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} = 0$

4- m i s o 1. $A = \log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4(4x^4)$ifodani soddalashtiring va uning x=-2 dagi qiymatini toping.

Yechish. $\log_a b^{2n} = 2n\log|b|$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 0,\ n \in N)$ bo'lgani uchun $\log_4 \frac{x^2}{4} = \log_4 x^2 - \log_4 4 = 2\log_4|x| - 1$

va $\log_4(4x^4) = \log_4 4 + \log_4 x^4 = 1 + 4\log_4|x|$ tengliklaro'rinli.Uholda,

$A = 2\log_4|x| - 1 - 2(1 + 4\log_4|x|) = -3 - 6\log_4|x|.$

x - -2 bo'lsa, $A = -3 - 6\log_4|-2| = -3 - 6\log_4 2 = -6.$

5- m i s o 1.ifodani soddalashtiring.

$$A = \frac{(\lg b \cdot 2^{\log_2(\lg b)^{\frac{1}{2}}})\lg^{\frac{1}{2}} b^2}{\sqrt{\frac{\lg^2 b+1}{2\lg b} + 1 - 10^{0,5\lg(\lg^{\frac{1}{2}})}}}$$

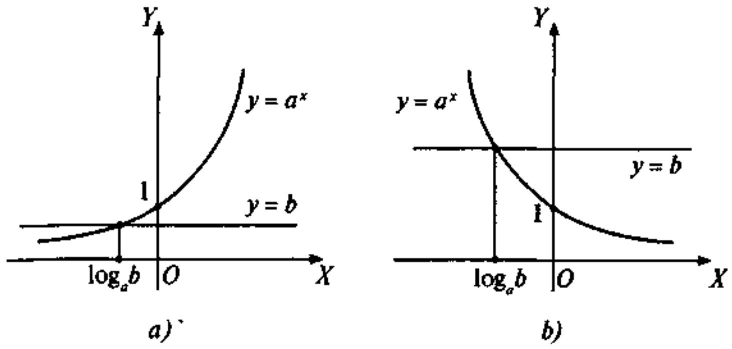
Yechish. Musbat sonlargina logarifmga ega bo'lgani uchun $\lg b > 0$ yoki $b > 1$ munosabatga ega bo'lamiz. Darajaning va logarifmning tegishli xossalaridan foydalanib, shakl almashtirishlar bajaramiz:

$$A = \frac{(\lg b \cdot \lg b)^{\frac{1}{2}} \lg^{\frac{1}{2}} b^2}{\sqrt{\frac{(\lg b+1)^2}{2\lg b}} - \sqrt{\lg\sqrt{b}}} = \frac{\lg b \cdot \frac{1}{\sqrt{\lg b^2}}}{\frac{\lg b + 1 - \sqrt{2\lg b} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\lg b}}{\sqrt{\lg b^2}}} =$$

$$\frac{\lg b}{\lg b + 1 - \lg b} = \lg b.$$

Ko’rsatkichli tenglamalar.

Ko'rsatkichli tenglamalar. $a^x = b$ $(a,\ b\in R)$ tenglama *eng sodda ko'rsatkichli* tenglamadir, bu yerda $a>0,\ a\neq 1$. Ko'rsatkichli ftmksiyaning qiymatlar to'plami $(0;+\infty)$ oraliqdan iborat bo'lgani uchun $b\leq 0$ bo'lganda qaralayot-gan tenglama yechimga ega bo'lmaydi. Agar $b>0$ bo'lsa, tenglama yagona yechimga ega va bu yechim $x=\log_a b$ sonidan iborat bo'ladi (74- rasm).



74- rasm.

Teorema. ***Agar*** $a>0,\ a\neq 1$ ***bo'lsa,***

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \qquad (1)$$

va

$$f(x) = g(x) \qquad (2)$$

tenglamalar teng kuchlidir.

Isbot. Agar α soni (2) tenglamaning ildizi bo'lsa, $f(\alpha)=g(\alpha)$ bo'ladi. U holda, $a^{f(\alpha)} = a^{g(\alpha)}$. Aksincha, α (1) tenglamaning ildizi bo'lsa, $a^{f(\alpha)} = a^{g(\alpha)}$ va a^x funksiyaning monotonligidan $f(\alpha)=g(\alpha)$ bo'ladi. Teorema isbot qilindi.

1 - m i s o l. $8^{5x^2-46} = 8^{2(x^2+1)}$ tenglamani yeching.

Y e c h i s h. Tenglama (1) ko'rinishda berilgan. Unga teng kuchli (2) ko'rinishga o'tamiz: $5x^2-46=2(x^2+1)$, bundan $x=-4$, $x=4$ aniqlanadi.

Agar tenglama $a^{f(x)}=b^{g(x)}$ (3) (bu yerda $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 0$) ko'rinishda bo'lsa, $b^{g(x)} = a^{\log_a(b^{g(x)})} = a^{g(x)\log_a b}$ ekanidan foydalanib, tenglamani $a^{f(x)} = a^{g(x)\log_a b}$ ko'rinishga keltiramiz. Bundan unga teng kuchli tenglamaga o'tiladi.

$f(x)=g(x)\log_a b$

2- m i s o l. $5^{3x-1}=3x$ tenglamani yechamiz. Yechish. $5^{3x-1}=5^{x\log_5 3}\Rightarrow 3x-1=x\log_5 3\Rightarrow x=\frac{1}{3-\log_5 3}$.

Agar tenglama $f(a^x)=0$ ko'rinishda bo'lsa, $a^x=t$ almashtirish orqali $f(t)=0$ tenglamaga o'tiladi. Har vaqt $a^x>0$ bo'lgani uchun $f(t)=0$ tenglamaning musbat ildizlarigina olinadi, so'ng $a^x=t$ bog'lanish yordamida berilgan tenglama ildizlari topiladi.

3- m i s o l. $4^x+2^x-6=0$ tenglamani yechamiz. Yechish. $2^x=t$ almashtirish $(2^x)^2+2^x-6=0$ tenglamani $t^2+t-6=0$ kvadrat tenglamaga keltiradi. Uning yechimlari t= -3, t=2. Musbat yechim bo'yicha $2^x=2$ ni tuzamiz. Bundan x=1.

Ko’rsatkichli tengsizliklar.

Ko'rsatkichli tengsizliklarni yechishda $y=a^x$ funksiyaning monotonligidan foydalaniladi. $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ tengsizlik, $a>1$ bo'lsa, $f(x)>g(x)$ tengsizlikka, $0<a<1$ bo'lganda esa $f(x)<g(x)$ tengsizlikka teng kuchli.

4- m i s o l. $0{,}5^{x^2+3x+7} < 0{,}5^{x^2+1}$ tengsizlikni yeching .

Yechish. $0 < 0{,}5 < 1$ bo'lgani uchun tengsizlik $x^2+3x+7>x^2+1$ algebraik tengsizlikka teng kuchli. Undan $x>-2$ aniqlanadi.

5- m i s o l. $4^{0{,}75x^2-2x+1} > 16^{x^2}$ tengsizlikni yechamiz.

Yechish. $4^{0.75x^2-2x+1} > 16^{x^2}$ tengsizlikni $4^{0{,}75x^2-2x+1} > 4^{2x^2}$ ko'rinishida yozib olamiz. $a=4>1$ bo'lgani uchun, tengsizlik o'ziga teng kuchli bo'lgan $0{,}75x^2-2x+1>2x^2$ tengsizlikka keladi. Y e c h i m: $-2<x<0{,}4.$

Agar tengsizlik $f(a^x)<0$ ko'rinishda bo'lsa, $a^x=t$ almashtirish uni $f(t)<0$ ko'rinishga keltiradi.

6- m i s o l. $9^x-3^{x+1}-4<0$ tengsizligini yechamiz. Yechish. $3^x=t$ almashtirish tengsizlikni $t^2-3t-4<0$ tengsizlikka keltiradi. Oxirgi tengsizlikning yechimi (-1; 4) bo'yicha $-1<3^x<4$ tengsizligini tuzamiz va yechamiz.

Javob: $-\infty<x<\log_3 4.$

7- m i s o l. $a^{x-1}<a^{2x}\ (a>0)$ tengsizlikni yechamiz.

Y e c h i s h. $a>1$, $a=1$ va $0<a<1$ bo'lgan hollarni alohida-alohida qaraymiz. $0<a<1$ bo'lsa, berilgan tengsizlik $x-1>2x$ tengsizlikka yoki $x<-1$ tengsizlikka teng kuchli. Demak, bu holda, $(-\infty;\ -1)$ oraliqdagi barcha sonlar va faqat shu sonlar tengsizlikning yechimi bo'ladi. a = 1 bo'lsa, $1^{x-1}<1^{2x}$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu tengsizlik yechimga ega emas. $a>1$ bo'lsa, berilgan tengsizlik $x-1<2x$ yoki $x>-1$ tengsizlikka teng kuchlidir. Demak, $a>1$ bo'lsa, $(-1;\ +\infty)$ oraliqdagi barcha sonlar va faqat shu sonlar tengsizlikning yechimi bo'ladi.

Javob: $0<a<1$ bo‘lsa, $x\in(-\infty;\ -1)$; $a=1$ bo‘lsa, $\varnothing$; . $a>1$ bo‘lsa, $x\in(-1;\ +\infty)$.

Logarifmik tenglamalar.

$\log_a x = b \quad (a>0,\ a\neq 1)$ tenglamani qaraymiz. Bu tenglama eng sodda logarifmik tenglama deyiladi. $x=a^b$ son qaralayotgan teng-lamaning ildizi bo'lishini ko'rish qiyin emas. Berilgan tenglama $x=a^b$ dan boshqa ildizga ega emasligini $y=\log_a x$ logarifmik funksiyaning monotonligidan foydalanib isbotlash mumkin (75- rasm). $\log_x N=b$ ko'rinishdagi tenglamani qaraymiz. Bu tenglamaning aniqlanish sohasi x ning $x>0,\ x\neq 1$ munosabatlarni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlaridan tashkil topadi. Agar $N\leq 0$ bo'lsa, bu tenglama yechimga ega bo'lmaydi. $N>0$ bo'lsa, $x = N^{\frac{1}{b}}$ dan iborat yagona yechimga ega bo'ladi.

1 - m i s o l. a) $\log_3 x=9$; b) $\log_x 64=2$ tenglamalarni yechamiz.

Y e c h i s h. a) Tenglamani potensirlaymiz. Natijada: $x=3^9$;

b) tenglamani potensirlaymiz: $x^2 = 64$, bundan $x = 8$.

1-t e o re m a. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a>0,\ a\neq 1)$ *tenglama*

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \qquad (1)$$

sistemaga teng kuchlidir.

I s b o t. $y=\log_a t\ (a>0, a\neq 1)$ logarifmik funksiya monoton. Shunga ko'ra $\log_a f(x) = \log_a g(x)$_ tengligining bajarilishi uchun $f(x) = g(x)$ bo'lishi kerak. Demak, $f(x)>0$ bo'lganda $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ tenglama $f(x) = g(x)$ tenglamaga teng kuchli.

1 '-teorema. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a>0,\ a\neq 1)$ *tenglama*

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

sistemaga teng kuchlidir.

Bu teoremani isbotlashda 1- teoremaning isbotidagi kabi mulohazalar yuritiladi.

teorema. ***Agar*** $0<a<1$ ***bo'lsa,*** $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ ***tengsizlik*** $0<f(x)<g(x)$ ***qo'sh tengsizlikka,*** $a>1$ ***bo'lsa,*** $f(x)>g(x)>0$ ***qo'sh tengsizlikka teng kuchlidir.***

Bu teoremaning isboti logarifmik funksiyaning monotonligidan kelib chiqadi.

3 - m i s o l. $\dfrac{\lg\sqrt{x+7}-\lg 2}{\lg 8-\lg(x-5)} = -1$ tenglamani yechamiz.

Yechish. 1) Tenglamaning aniqlanish sohasini topamiz:

$$\begin{cases} x+7>0, \\ x-5>0, \\ \lg 8-\lg(x-5)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-7, \\ x>5, \\ x-5\neq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>5, \\ x>13; \end{cases}$$

2) ifodani sodda ko'rinishga keltirish maqsadida ayniy almashtirishlarni bajaramiz:

$$\lg\sqrt{x+7}-\lg 2 = \lg(x-5)-\lg 8 \Rightarrow \lg\frac{\sqrt{x+7}}{2} = \lg\frac{x-5}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x+7}}{2} = \frac{x-5}{8} \Rightarrow \left(\sqrt{x+7}\right)^2 = \left(\frac{x-5}{4}\right)^2 \Rightarrow x^2-26x+87=0.$$

Bundan $x = 29$ ekani aniqlanadi.

5 - misol. $\log_{\frac{x}{3}} x^2 - 18\log_{81x} x^3 + 20\log_{9x}\sqrt{x} = 0$ tenglamani yeching.

Y e c h i s h. Logarifmni boshqa asosga o'tkazish formu-lasidan foydalanib, barcha logarifmlarni 3 asosga o'tkazamiz:

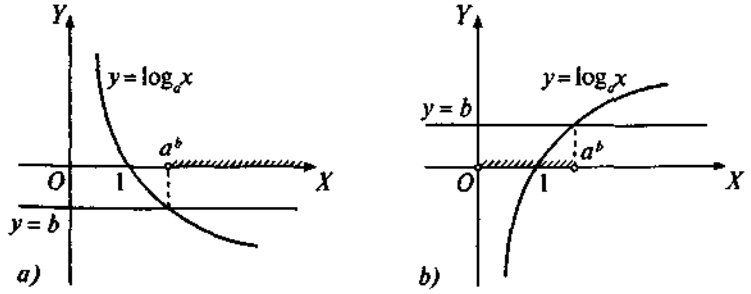
$$\frac{2\log_3 x}{\log_3 x-1} - 18\cdot\frac{3\log_3 x}{4+\log_3 x} + 20\cdot\frac{\frac{1}{2}\log_3 x}{2+\log_3 x} = 0.$$

Bu tenglamada $\log_3 x = t$ almashtirish bajaramiz va $\dfrac{t(7t^2+2t-14)}{(t-1)(t+4)(t+2)} = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz. Uni yechib, $t_1 = 0,\ t_2 = \dfrac{-1-3\sqrt{11}}{7},\ t_3 = \dfrac{-1+3\sqrt{11}}{7}$ yechimlarni topamiz. $\log_3 x = t$ bog'lanish yordamida berilgan tenglamaning ildizlari topiladi: $x_1 = 0,\ x_2 = 3^{\frac{-1-3\sqrt{11}}{7}},\ x_3 = 3^{\frac{-1+3\sqrt{11}}{7}}$.

Logarifmik tengsizliklar.

$\log_a x < b$, $\log_a x > b$, $\log_a x \le b$, $\log_a x \ge b$ ko'rinishdagi (bu yerda $a > 0$, $a \ne 1$) tengsizliklar eng sodda logarifmik tengsizliklardir. Ularni yechishda $y = \log_a x$ funksiyaning monotonligidan foydalaniladi.

$\log_a x < b$ logarifmik tengsizlikni qaraymiz. Agar $0 < a < 1$ bo'lsa, bu tengsizlikning barcha yechimlari to'plami $(a^b; +\infty)$ oraliqdan iborat bo'ladi (75- *a* rasm). Agar $a > 1$ bo'lsa, qaralayotgan tengsizlikning barcha yechimlari to'plami $(0;\ a^b)$ oraliqdan iborat bo'ladi (75- *b* rasm).



75- rasm.

$\log_a x > b$, $\log_a x \le b$, $\log_a x \ge b$ tengsizliklar ham shunga o'xshash yechiladi.

2-misol. a) $\log_3 x < 9$; b) $\log_{\frac{1}{3}} x < 9$ tengsizliklarni yechamiz.

Y e c h i s h. a) oldingi misolda Iog₃x = 9 tenglama-ning $x = 3^9$ ildizi topilgan edi. Asos $a = 3 > 1$, $b = 9$.

Yechim: $(0;\ 3^9)$ yoki $0 < x < 3^9$;

b) $a = \frac{1}{3} \in (0;\ 1)$ bo'lgani uchun yechim $(3^{-9};\ +\infty)$ oraliqdan iborat.

4- m i s o l. $\log_x \frac{3x+5}{x-3} < 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Tengsizlikni

$$\log_x \frac{3x+5}{x-3} < \log_x 1$$

ko'rinishda yozib olamiz va quyidagi hollarniqaraymiz:

1) $0 < x < 1$ bo'lsin. U holda $\frac{3x+5}{x-3} > 1$ tengsizlikka yoki $\frac{x+4}{x-3} > 0$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu tengsizlik $(0;\ 1)$ oraliqda yechimga ega emas.

2) $x > 1$ bo'lsin. U holda $0 < \frac{3x+5}{x-3} < 1$ qo'sh tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu qo'sh tengsizlik $x > 1$ shartni qanoatlantiruvchi yechimga ega єmas. Shunday qilib, berilgan tengsizlik yechimga ega emas.

Ko'rsatkichli va logarifmik tenglamalar sistemasi.

Bu tur sistemalarni yechishda oldingi bandlarda bayon qilingan algebraik qo'shish, o'rniga qo'yish, yangi o'zga-ruvchi kiritish, ko'paytuvchilarga ajratish, grafik yechish usullaridan, shuningdek, funksiyalarning xossalaridan foydalaniladi.

1-misol. $\begin{cases} \log_{\sqrt{3}} x + \log_3 y = \log_{\sqrt[5]{3}} 3, \\ \log_3 x - \log_{\sqrt{3}} y = -\log_3 243 \end{cases}$ (1)

ni yeching.

Yechish. Logarifmlarni bir asosga *(a* = 3 ga) kel-tirilib, potensirlashlar va soddalashtirishlar bajariladi:

$$\log_{\sqrt{3}} x = 2\log_3 x; \quad \log_3 3 = 1; \quad \log_{\sqrt[5]{3}} 3 = 5\log_3 3;$$

$$\log_3 x = u; \quad \log_3 y = v.$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} 2u + v = 5, \\ u - 2v = -5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3^3 = 27, \\ x = 3. \end{cases}$$

2-misol.

$$\begin{cases} 2^{1+2\log_2(y-x)} = 32, \\ 2\log_5(2y - x - 12) = \log_5(y - x) + \log_5(y + x) \end{cases} \quad (2)$$

ni yeching.

Yechish. Birinchi tenglamadan $(y-x)^2=16$ tenglamani va bundan $y-x>0$ ekanligini e'tiborga olib , $y-x=4$ ni olamiz. Sistema quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{cases} y - x = 4, \\ 2\log_5(2y - x - 12) = \log_5(y - x) + \log_5(y + x). \end{cases} \quad (2')$$

$(2')$ sistemadagi 1-tenglamadan $y = 4 + x$ ni topib, 2- tenglamaga qo'ysak, faqat x noma'lum qatnashadigan tenglama hosil bo'ladi, uni yechib, x ni topamiz:

$$2\log_5(x-4) = \log_5 4\log_5(4+2x) \Rightarrow \log_5(x-4)^2 =$$
$$= \log_5 4(4+2x) \Rightarrow (x-4)^2 = 4(4+2x) \Rightarrow x^2 - 16x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{x_1 = 0,\ x_2 = 16\}.$$

Bu tenglamani faqat $x=16$ soni qanoatlantiradi. $y=4+x$ dan $y=20$ ekani kelib chiqadi.

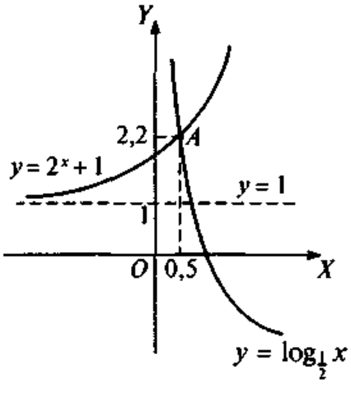
Javob: $(16;\ 20)$.

3- m i s o l. $\begin{cases} y - 2^x = 1, \\ \log_{\frac{1}{2}} x - y = 0 \end{cases}$ sistemani grafik usulda yeching.

Y e c h i s h. Koordinatalar sistemasida $y = 2^x + 1$ va $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ funksiyalar grafiklarini yasaymiz (76- rasm). Ikkala grafik taqriban $A(0,5;\ 2,2)$ nuqtada kesishadi.

Javob: $x \approx 0,5,\ y \approx 2,2.$

4- m i s o l. $n > 0,\ n \neq 1,\ \frac{\lg n}{10^{2m}-1} > 0$ bo'lganda $\begin{cases} \lg x - \lg y = m, \\ 10^{x^2-y^2} = n \end{cases}$ sistemani yeching.



76- rasm.