Stereometriya asoslari .

8. Aksiomatik nazariya. Stereometriya aksiomalari. Ularning planimetriya aksiomalari bilan aloqasi.

Fazodagi aksiomalar

Stereometriya, ya'ni fazodagi geometriyani o'rganishni biz uning aksiomalaridan boshlaymiz:

S_1. Tekislik qanday bo'lishidan qat'iy nazar, unga tegishli va unga tegishli bo'lmagan ∩uqtalar mavjud.

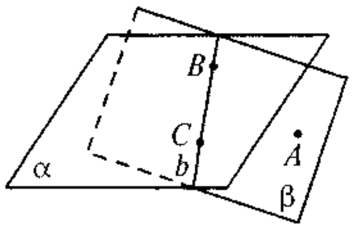
S_2. Agar ikkita bar xil tekislik umumiy nuqtaga ega bo'lsa, bu tekisliklar shu nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'ylab o'zaro kesishadi.

S_3. Bitta to'g'ri chiziqda yotmagan ixtiyoriy uchta nuqtadan tekislik o'tkazish mumkin va u yagonadir.

Yuqorida keltirilgan aksiomalar yordamida ba'zi teoremalarni isbotlaymiz.

1-teorema. ***Agar to'g'richiziqning ikkita nuqtasi tekislikka tegishli bo'lsa, to'g'ri chiziq shu tekislikda yotadi.***

I s b o t i. To'g'ri chiziqning *B* va *C* nuqtalari α tekislikda yotsin (13.1- chizma). U holda S_1 aksiomaga ko'ra α tekislikda yotmaydigan *A* nuqta topiladi.Bitta to'g'ri chiziqda yotmagan *A, B, C* nuqtalardan, S_3 aksiomaga ko'ra, yagona β tekislik o'tkazish mumkin. Modomiki, $A \in \alpha$ ekan, α va β har xil tekisliklardir. Lekin α va β tekisliklar umumiy *C* nuqtaga ega, shu sababli S_2 aksiomaga ko'ra, ular *C* nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi. Ikkinchi tomondan, α va β tekisliklar umumiy *B* nuqtaga ega, shu sababli ular *B* nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. Shunday qilib, α va β tekisliklar *B* va C nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi, lekin *B* va C nuqtalar *b* to"g'ri chiziqda yotadi. Modomiki, ikkita bar xil *Bva C* nuqtadan yagona to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin ekan, α va β tekisliklar *B va C* nuqtalar yotgan *b* to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. Demak, *BC* to'g'ri chiziqning



13.1- chizma.

barcha nuqtalari α tekislikka tegishli bo'ladi.

Agar berilgan α va β tekisliklar ikkita, mos ravishda, *B* va C nuqtalardan o'tuvchi har xil to'g'ri chiziqlar bo'ylab kesishadi, deb faraz qilsak, α va β tekisliklar ustma-ust tushishi lozim, bu esa yasalishiga ko'ra mumkin emas. Teorema isbotlandi.

2- t e o r e m a . ***Berilgan to'g'ri chiziq va undo yotmagan nuqta orqali yagona tekislik o'tkazish mumkin.***

I s b o t i. *a* — berilgan to'g'ri chiziq va *C* unda yotmagan berilgan nuqta bo'lsin. Berilgan *a* to'g'ri chiziqda (planimetriya aksiomasiga ko'ra), hech bo'lmaganda, ikkita ,4 va *B* nuqta topiladi. *A, Bva* Cnuqtalar bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi. S_3 aksiomaga ko'ra, bitta to'g'ri chiziqda yotmagan uchta *A, Bva C* nuqtadan yagona tekislik o'tkazish mumkin. 1 - teoremaga muvofiq berilgan *α* to'g'ri chiziq shu tekislikda yotadi. Teorema isbotlandi.

3-teorema. ***Berilgan kesishuvchi ikkita to'g'ri chiziq orqali yagona tekislik o'tkazish mumkin.***

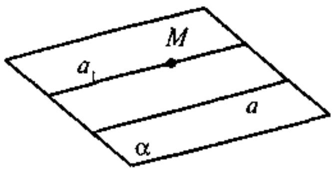
I s b o t i. Berilgan *a va b* to'g'ri chiziqlar Cnuqtada kesishsin, ya'ni$a \cap b = C$ va $C \in a$, $C \in b$bo'lsin. Planimetriya aksiomalariga ko'ra, *α* to'g'ri chiziqda, hech bo'lmaganda, yana bitta *A* nuqta va *b* to'g'ri chiziqda esa *B* nuqta topiladi. Bu *A, B, C* nuqtalarhar xil va bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi.

S_3 aksiomaga ko'ra, *A, B, C* nuqtalar orqali yagona α tekislik o'tkazish mumkin. 1- teoremaga ko'ra *α* va *b* to'g'ri chiziqlar α tekislikda yotadi. Teorema isbotlandi.

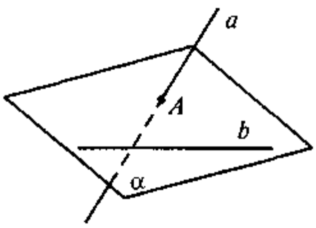
9. To'g'ri chiziqlar va tekisliklar orasidagi burchaklar. Parallellik va perpendikularlik. To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro joylashuvi. To'g'ri chiziq va tekislikning parallellik alomati. To'g'ri chiziq va tekislikning parallelligi va perpendikularligi haqidagi teoremalar.

Fazodagi parallel to'g'ri chiziqlar

1- t a ' r i f. *Fazodagi ikkita a va b to 'g'ri chiziq bir tekislikda yotsa va kesishmasa,* ***ular parallel to'g'ri chiziqlar*** *deyiladi.*
a va b to'g'ri chiziqlarning parallelligi $a \parallel b$ kabi yoziladi. Tekislikda bo'lgani kabi, fazoda quyidagi teorema o'rinli.
1-t eorema. ***Fazoning berilgan to'g'ri chiziqda yotmagan nuqtasidan shu to'g'ri chiziqqa parallel yagona to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.***
I s b o t i. *a* — berilgan to'g'ri chiziq va *M*— bu to'g'ri chiziqda yotmagan nuqta bo'lsin (14.1-chizma). *a* to'g'ri chiziq va *M*nuqta orqali α tekislik o'tkazamiz. So'ngra α tekislikda *M* nuqta orqali *a* to'g'ri chiziqqa parallel a_1 to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Ular uchun tekislikdagi (XIII bobga q.) barcha xulosalar o'rinli. Jumladan, berilgan *M* nuqta orqali berilgan to'g'ri chiziqqa parallel yagona to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. Haqiqatan, agar berilgan *M* nuqta orqali va *a* to'g'ri chiziqqa parallel ravishda o'tkazilgan boshqa a_2 to'g'ri chiziq mavjud deb faraz qilsak, *a* va a_2 to'g'ri chiziqlar orqali (XIII bob) α_1 tekislik o'tkazish mumkin. Ikkinchi tomondan, α_1 tekislik *a* to'g'ri chiziq va *M* nuqta orqali o'tadi, demak, avvalgi bobda isbotlanganiga ko'ra, u α tekislik bilan ustma-ust tushadi. Bundan, parallel to'g'ri chiziqlar aksiomasi bo'yicha a_1 va a_2 to'g'ri chiziqlarning ustma-ust tushishi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.
Bizga α tekislik hamda ikkita *a* va *b* to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. *a* to'g'ri chiziq α tekislik bilan *A* nuqtada kesishsin, *b* to'g'ri chiziq esa α tekislikda yotsin, lekin u *A* nuqta orqali o'tmasin (14.2-chizma). α va b to'g'ri chiziqlar orqali tekislik o'tkazish mumkin emas, chunki, aks holda, *b* to'g'ri chiziq va *A* nuqta orqali ikkita



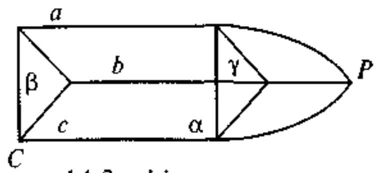
14.1- chizma.



14.2- chizma.

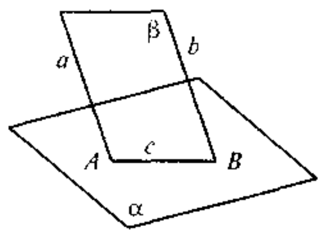
har xil tekisliklar o'tkazish mumkin bo'ladi: ulardan biri — *a* to'g'ri chiziqni kesib o'tuvchi α tekislik bo'lsa, ikkinchisi esa *a* to'g'ri chiziq unda yotadigan tekislikdir. Bunday bo'lishi mumkin emas. Shunday qilib, fazodagi to'g'ri chiziqlar uch xil bo'lishi mumkin:
1. Kesishuvchi to'g'ri chiziqlar.
2. Parallel to'g'ri chiziqlar.
3. Parallel bo'lmagan va kesishmaydigan to'g'ri chiziqlar.
2-ta'rif. *Fazodagi o'zaro parallel bo'lmagan va kesishmaydigan to'g'ri chiziqlar* ***ayqash to'g'ri chiziqlar*** *deyiladi.*
2-t eorema (to'g'ri chiziqlarning parallellik alomati). ***Uchinchi to'g'ri chiziqqa parallel ikkita to'g'ri chiziq o'zaro paralleldir.***
I s b o t i. Faraz qilaylik, $a \parallel b$ va $b \parallel c$ bo'lsin. $a \parallel c$ bo'lishini isbotlaymiz. *a* va *c* to'g'ri chiziqlar o'zaro kesishmaydi, chunki, aks holda, *a* va *c* to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi orqali bitta *b* to'g'ri chiziqning o'ziga parallel ikkita har xil *a* va *c* to'g'ri chiziq o'tishi kerak edi, lekin bunday bo'lishi mumkin emas.
a va c to'g'ri chiziqlar ayqash bo'lsin, deb faraz qilaylik. Parallel *αvab* to'g'ri chiziqlar orqali γ tekislik, parallel b va c to'g'ri chiziqlar orqali esa α tekislik o'tkazamiz (14.3-chizma).
α to'g'ri chiziq va *c* to'g'ri chiziqning biror *C* nuqtasi orqali β tekislik o'tkazamiz. α va β tekisliklarning kesishish chizig'i *m* to'g'ri chiziq bo'lsin. U holda *b, c, m* to'g'ri chiziqlar bitta α

tekislikda yotadi, bunda $c \parallel b$ bo'ladi. Shu sababli *c* to'g'ri chiziq bilan kesishuvchi *m* to'g'ri chiziq, unga parallel *b* to'g'ri chiziqni biror *P* nuqtada kesib o'tishi lozim. *m* va b to'g'ri chiziqlar, mos ravishda, β va γ tekisliklarda yotadi. Shu sababli ular uchun umumiy *P* nuqta ularning kesishish chizig'i bo'lgan *α* to'g'ri chiziqda yotadi. Lekin bunda *α* va *b* to'g'ri chiziqlar, teoremaning shartiga zid ravishda, umumiy *P* nuqtaga ega bo'ladi.
Demak, *α* va *c* to'g'ri chiziqlar kesishuvchi ham, ayqash ham bo'lishi mumkin emas, ular faqat parallel bo'ladi, ya'ni $a \parallel c$ .Teorema isbotlandi.
Bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi ikkita va undan ko'p kesmalar *o 'zaro parallel* deyiladi.
M a s a l a. Agar ikki paral lel to'g'ri chiziqning biri tekis-likni kesib o'tsa, ikkinchisi ham shu tekislikni kesib o'tadi.



14.3- chizma.

Y e c h i l i s h i. $a \parallel b$ bo'lib, *a* to'g'ri chiziq α tekislikni *A* nuqtada kesib o'tsin (14.4- chizma). Ikkita parallel *a* va *b* to'g'ri chiziq orqali yagona β tekislik o'tkazish mumkin. α va β tekisliklar umumiy^4 nuqtaga ega, shu sababli ular, S_2 aksiomaga binoan, *c* to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi. β tekislikda *c* to'g'ri

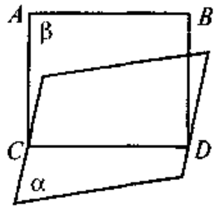


14.4- chizma.

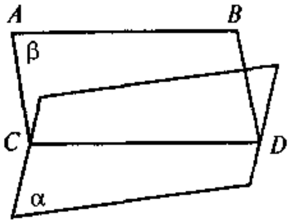
chiziq parallel to'g'ri chiziqlardan birini *a* to'g'ri chiziqni *A* nuqtada kesib o'tadi. Demak, *c* to'g'ri chiziq *b* to'g'ri chiziqni ham B nuqtada kesib o'tadi. Modomiki, *AB* to'g'ri chiziqning *A* va B nuqtalari α tekislikda yotgan ekan, *AB* to'g'ri chiziqning o'zi ham α tekislikda yotadi. Shuningdek, B nuqta *b* to'g'ri chiziqqa tegishh bo'lganligidan, *b* to'g'ri chiziq, haqiqatan ham, α tekislikni B nuqtada kesib o'tadi.

Parallel to'g'ri chiziq va tekislik

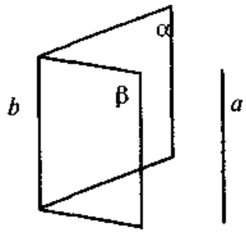
3- t a ' r if. *Agar a to'g'ri chiziq va a tekislik cheksiz davom ettirilganda ham kesishmasa, ular parallel deyiladi.*
a to'g'ri chiziq va oc tekislikning parallelligi $a \parallel \alpha$ kabi belgilanadi. 3-teorema (to'g'ri chiziq va tekislikning paralellik alomati). ***Agar to'g'ri chiziq tekislikda yotgan biror to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, u tekislikning o'ziga ham parallel bo'ladi.***
I s b o t i. Teoremaning sharttga ko'ra $AB \parallel CD$, $CD \subset \alpha$ (14.5-chizma). Shu sababli *AB* va *CD* to'g'ri chiziqlar orqali β tekislik o'tkazish mumkin. U holda $\alpha \cap \beta = CD$ bo'ladi hamda α va β tekisliklarning barcha umumiy nuqtalari *CD* to'g'ri chiziqda yotadi. *AB* to'g'ri chiziq α tekislik bilan qandaydir *P* nuqtada kesishadi, deb faraz qilaylik. *AB* to'g'ri chiziq β tekislikda yotganligidan, *P* nuqta β tekislikka tegishli bo'ladi. Ikkinchi tomondan, P nuqta α tekislikka tegishli. P nuqta α va β tekisliklarga tegishli bo'lganligidan, u tekisliklarning kesishish chizig'i — *CD* to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lishi kerak. Shunday qilib, *ABva* CD to'g'ri chiziqlar P umumiy nuqtaga ega, ya'ni ular kesishadi. Bu esa teoremaning shartiga zid. Bundan farazimizning noto'g'ri ekanligi kelib chiqadi. Demak, *AB* to'g'ri chiziq α tekislik bilan kesishmaydi, ya'ni ular parallel bo'ladi.
4- t e o r e m a . ***Agar* β *tekislik (14.6-chizma) boshqa* α *tekislikka parallel AB to'g'ri chiziq orqali o'tib, shu* α *tekislikni kesib o'tsa, kesishish chizig'i berilgan AB to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi.***



14.5- chizma.



14.6- chizma.



14.7- chizma.

I s b o t i. Modomiki, *AB* va *CD* to'g'ri chiziqlar bitta β tekislikda yotgan ekan, parallel to'g'ri chiziqlar uchun birinchi shart bajariladi. *AB* va *CD* to'g'ri chiziqlar kesishmaydi, chunki, aks holda, *AB* to'g'ri chiziq *CD* bilan kesishgach, u α tekislik bilan kesishishi lozim. Shartga ko'ra esa AB to'g'ri chiziq va α tekislik kesishmaydi. Demak, farazimiz noto'g'ri, shunday qilib, $AB \parallel CD$. Teorema isbotlandi.

N a t ij a. *Agar a to 'g'ri chiziq kesishuvchi* α *va* β *tekisliklarning har birigaparallel bo'lsa* (14.7-chizma), *u tekisliklarning kesishish chizig'i b ga ham parallel bo'ladi, ya'ni* $a \parallel \alpha,\ b \parallel \beta,\ \alpha \cap \beta = b$ *munosabatlardan* $a \parallel b$ *bo 'lishi kelib chiqadi.*

To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro perpendikularligi

1- t a' r i f. *Agar faz<oda berilgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak* 90° *ga teng bo'lsa, ular* ***o'zaro perpendikular to'g'ri chiziqlar*** *deyiladi.*

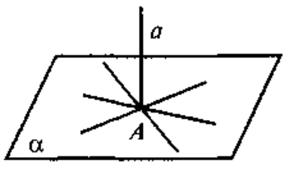
a va b to'g'ri chiziqlarning peφendikularligi $a \perp b$ ko'rinishda yoziladi. Ta'rifdan perpendikular to'g'ri chiziqlarning o'zaro kesishuvchan, shuningdek, ayqash bo'lishi ham kelib chiqadi.

2-1 a' r i f. *Agar a to'g'ri chiziq, a. tekislikdagi, u bilan kesishish nuqtasi A orqali o'tuvchi ixtiyoriy to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lsa, a to'g'ri chiziq* ***a. tekislikkaperpendikular*** *deyiladi* (15.1-chizma).

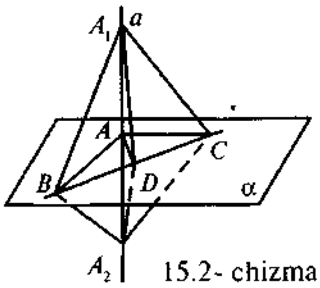
1-teorema (to'g'ri chiziq va tekislikning perpendikularlik alomati). ***Agar a to'g'ri chiziq, uning a tekislik bilan kesishish nuqtasi orqali o'tuvchi ikkita to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lsa, a to'g'ri chiziq α tekislikning o'ziga ham perpendikular bo'ladi.***

I s b o t i. *a* to'g'ri chiziqning α tekislik bilan kesishish nuqtasi *A* orqali *a* to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan ikkita *ABvaAC* to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan bo'lsin (15.2- chizma). *a* to'g'ri chiziq α tekislikdagi *A* nuqta orqali o'tuvchi yana bitta *AD* to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lishini isbotlash lozim bo'ladi.

α tekislikda *AB vaAC* to'g'ri chiziqlarni, masalan, Bva *C* nuqtalarda kesib o'tuvchi BC to'g'ri chiziq o'tkazamiz, u *AD* to'g'ri chiziq bilan *D* nuqtada kesishadi. *α* to'g'ri chiziqdagi *A* nuqtaning har xil tomonlarida o'zaro teng $AA_1 = AA_2$ kesmalarni joylashtiramiz. So'ngra A_1 va A_2 nuqtalarni *B, C va D* nuqtalar bilan tutashtiramiz. Natijada,



15.1- chizma.



15.2- chizma.

ikkita teng yonli A_1A_2B va A_1A_2C uchburchaklarni hosil qilamiz:

teng proyeksiyalarga ega og'malar sifatida, $A_1B = A_2B$ va $A_1C = A_2C$ U holda tomonlari teng uchburchaklar sifatida, $\Delta A_1BC = \Delta A_2BC$ bo'ladi. Bundan, $\angle A_1CB = \angle A_2CB$ bo'lishi kelib chiqadi. Endi ΔA_1CD va ΔA_2CD larni taqqoslaymiz. Ularda *CD* — umumiy tomon, $A_1C = A_2C$ hamda $\angle A_1CD = \angle A_2CD$, shuning uchun ular ikki tomoni va ular orasidagi burchagi bo'yicha o'zaro teng. Bundan $A_1D = A_2D$ bo'lishini olamiz. Uchta tomonlari bo'yicha $\Delta A_1AD = \Delta A_2AD$ bo'ladi. Bundan $\angle A_1AD = \angle A_2AD$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu burchaklar — qo'shni burchaklar bo'lganligidan, ularning har biri 90° ga teng, ya'ni $A_1A_2 \perp AD$. Teorema isbotlandi.

3- t a' r i f. *Tekislikni kesib o 'tib, unga perpendikular bo 'lmagan to'g'ri chiziq, bu tekislikka* ***og'ma*** *deyiladi.*

Berilgan *A* nuqtadan α tekislikka *AB* perpendikular *va AC* og'ma o'tkazilgan bo'lsin (15.3- chizma). Perpendikular va og'malar tekislikni kesib o'tadigan *B va C* nuqtalarni tutashtirib, α tekislikka *AC* og'maning proyeksiyasi deb ataladigan *BC* kesmani hosil qilamiz va quyidagicha yozamiz:

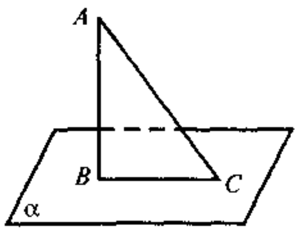
$$\mathrm{pr}_\alpha AC = BC. \qquad (1)$$

2- t e o r e m a. ***Agar α tekislikdan tashqarida yotuvchi P nuqtadan bu tekislikka PA perpendikular va PB, PC,... og'malar o'tkazilgan bo'lsa:***

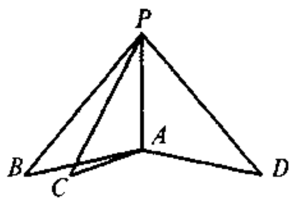
1) ***proyeksiyalari teng og'malar teng bo'ladi;***

2) ***ikkita og'madan qaysi birining proyeksiyasi katta bo'lsa, o'sha og'ma katta bo'ladi.***

I s b o t i. Agar barcha uchburchaklar tekisliklarini ΔPAB tekisligining ustiga yotqizsak (15.4-chizma), fazodagi teorema planimetriyadagi teoremaga keltiriladi. U holda barcha og'malarning proyeksiyalari bitta *AD* to'g'ri chiziqda yotadi. Planimetriyada isbotlangan teorema bo'yicha $AD > AB > AC$ dan $PD > PB > PC$ bo'lishi kelib chiqadi.



15.3- chizma.



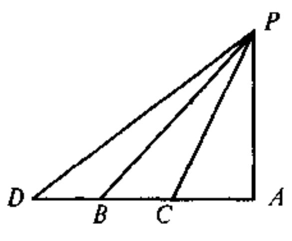
15.4- chizma.

74

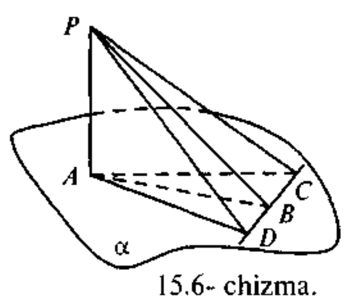
I z o h. *PA* — to'g'ri burchakli uchburchakning kateti, *PD, PB, PC,...* gipotenuzalardan iborat (15.5-chizma), shuning uchun *PA* kesmaning uzunligi shu *P* nuqtadan o'tkazilgan ixtiyoriy og'maning uzunligidan kichik bo'ladi.

4-teorema (uch perpendikular haqida). ***Tekislikda og'maning asosi orqali uningproyeksiyasiga perpendikular ravishda o'tkazilgan to'g'ri chiziq og'maning o'ziga ham perpendikular bo'ladi.***

I s b o t i. Berilgan α tekislikka *PA* perpendikular va *PB* og'ma o'tkazilgan bo'lsin (15.6- chizma). *A* va B nuqtalarni tutashtirib, *PB* og'maning α tekislikka *AB* proyeksiyasini olamiz. *B* nuqtadan α tekislikka *AB* ga perpendikular *CD* to'g'ri chiziq o'tkazamizva $CD \perp PB$ bo'lishini isbotlaymiz. *CD* to'g'ri chiziqda ixtiyoriy, o'zaro teng *BC* = *BD* kesmalarni joylashtiramiz. U holda, o'zaro teng *AC* - *AD* proyeksiyalarga ega bo'lgan fazodagi og'malar sifatida, *PC* = *PD* bo'ladi. Endi ΔPCD teng yonli uchburchak bo'ladi va shuning uchun uning *PB* medianasi balandlik ham bo'ladi, ya'ni $PB \perp CD$. Teorema isbotlandi.

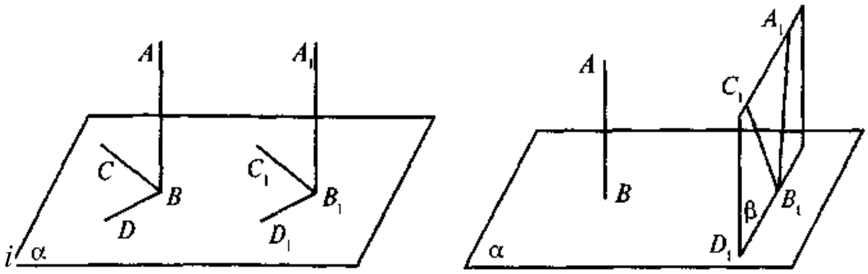


15.5- chizma.



15.6- chizma.

Yuqoridagi chizmadan foydalanib, isbotlangan tasdiqqa teskari teoremani ham isbotlash mumkin.
5-teorema (teskari teorema). ***Tekislikda PB og·maning asosi orqali og'maga perpendikular ravishda o'tkazilgan CD to'g'ri chiziq og'maning AB proyeksiyasiga ham perpendikular bo'ladi.***
Isbotini mustaqil ravishda amalga oshirish tavsiya qilinadi.
Endi to'g'ri chiziqlar hamda tekisliklarning parallelligi va perpendikularligi orasidagi bog'lanishni ifodalovchi ba'zi tasdiqlarni qaraymiz.
6- t e o r e m a. ***Agar α tekislik o'zaro parallel AB, A_1B_1 to'g'ri chiziqlarning bittasiga perpendikular bo'lsa, u to'g'ri chiziqlarnirig ikkinchisiga ham perpendikular bo'ladi.***
I s b o t i. α tekislik va $AB \parallel A_1B_1$ berilgan hamda $AB \perp \alpha$ bo'lsin (15.7-chizma). α tekislikda B nuqta orqali ikkita $BCvaBD$ to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. α tekislikda B_1 nuqta orqali $B_1C_1 \parallel BC$, $B_1D_1 \parallel BD$ to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. Shartga ko'ra, $AB \perp \alpha$ bo'lgandan, $AB \perp BC$, $AB \perp BD$ bo'ladi. U holda, mos tomonlari parallel burchaklar sifatida, $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$, $\angle A_1B_1D_1 = \angle ABD$ bo'ladi. To'g'ri chiziq va tekisliklarning perpendikularlik alomatidan (1- teorema), $A_1B_1 \perp \alpha$ bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.
7-teorema (teskari teorema). *Agar ikkita* AB *va* A_1B_1 *to'g'ri chiziq bitta tekislikka perpendikular bo'lsa, ular o'zaro parallel bo'ladi.*
I s b o t i. Teskarisini faraz qilish yo'lini tutamiz. $AB \perp \alpha$, $A_1B_1 \perp \alpha$, lekin A_1B_1 to'g'ri chiziq AB to'g'ri chiziqqa parallel bo'ltnasin (15.8- chizma). B_1 nuqta orqali $B_1C_1 \parallel BA$ to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Yuqorida isbotlangan teoremadan $B_1C_1 \perp \alpha$ bo'lishi kelib chiqadi. Kesishuvchi B_1A_1 va B_1C_1 to'g'ri chiziqlar orqali β tekislikni o'tkazamiz. Bunda α va β tekisliklarning kesishish chizig'i B_1D_1 bo'ladi. $B_1A_1 \perp \alpha$, $B_1C_1 \perp \alpha$ bo'lganligidan, $B_1A_1 \perp B_1D_1$ va $B_1C_1 \perp B_1D_1$ bo'ladi. Shunday qilib, B_1 nuqtadan bitta, B_1D_1 to'g'ri chiziqqa



15.7- chizma. 15.8- chizma.

ikkita perpendikular o'tkazilganligini olamiz. Bunday bo'lishi mumkin emas, demak, farazimiz noto'g'ri va $B_1A_1 \parallel BA$ bo'ladi.
Teorema isbotlandi.

Takrorlash uchun savol va topshiriqlar

1. Fazoda qanday to'g'ri chiziqlar parallel deyiladi?
2. Fazoda qanday to'g'ri chiziqlar ayqash deyiladi?
3. Fazoda to'g'ri chiziqlarning parallellik alomati.
4. Tekislikka parallel to'g'ri chiziqning ta'rifi.
5. To'g'ri chiziq va tekislikning parallellik alomati.
6. Ikki tekislik qachon parallel deyiladi?
7. Tekisliklarning parallellik alomati.
8. Parallel tekisliklar orasida joylashgan parallel to'g' ri chiziqlarning •xossasi.
9. Parallel tekisliklardan birini kesib o'tuvchi to'g'ri chiziqning xossasi.
10. Parallel to'g'ri chiziqlardan birini kesib o'tuvchi tekislikning xossasi.
11. To'g'ri chiziqda yotmagan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa parallel yagona to'g'ri chiziq o'tkazish mumkinligini isbotlang.
12. Tekislikda yotmagan nuqtadan berilgan tekislikka parallel yagona tekislik o'tkazish mumkinligini isbotlang.

10. Nuqtadan tekislikkacha masofa.To'g'ri chiziq va unga parallel tekislik orasidagi masofa. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak. Ikki tekislikning o'zaro joylashuvi.Tekisliklarning parallellik alomati. Tekisliklarning perpendikularligi.Tekisliklarning parallelligi va perpendikularligi haqidagi teoremalar.

Nuqtadan tekislikkacha masofa.To'g'ri chiziq va unga parallel tekislik orasidagi masofa.

T a' r i f. P ***nuqtadan α tekislikkacha bo'lgan masofa*** *deb, P nuqtadan a tekislikka o 'tkazilgan perpendikularning uzunligiga aytiladi.*

$P(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan $a: Ax+By+Cz+D=0$ tekislikkacha bo'lgan masofa

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (2)$$

kabi yoziladi.

Planimetriyadagi kabi, teskari tasdiqlar ham bajariladi.

3-teorema (teskari teorema). ***Agar berilgan P nuqtadan a. tekislikka PA perpendikular va PB, PC,... og'malar o'tkazilgan bo'lsa:***

1) ***teng og'malar teng proyeksiyalarga ega bo'ladi;***
2) ***ikkita proyeksiyadan qaysi biri katta og'maga mos kelsa, o'sha proyeksiya katta bo'ladi.***

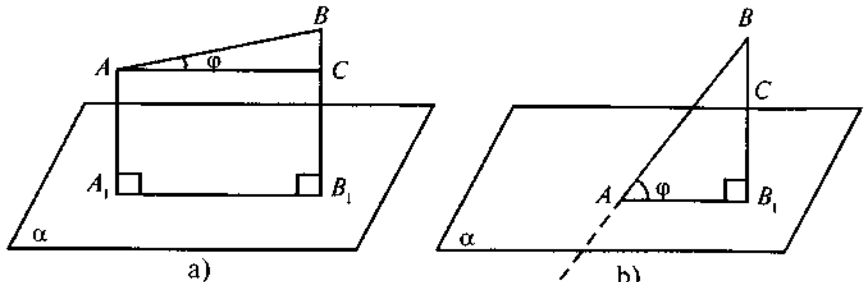
To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak

Ta' r i f. *Berilgan AB* ***to'g'ri chiziq bilan α tekislik orasidagi burchak*** *deb, to 'g'ri chiziq va uning tekislikdagiproyeksiyasi orasidagi φ burchakka aytiladi.*

15.14- chizmada ikki hoi ko'rsatilgan:

1) *AB* to'g'ri chiziq α tekislikni kesmaydi (15.14- *a* chizma).

2) *AB* to'g'ri chiziq α tekislikni kesib o'tadi (15.14- *b* chizma). Birinchi holda to'g'ri chiziqning ixtiyoriy *A* va *B* nuqtalaridan AA_1 va BB_1 perpendikularlar o'tkazamiz. *A* nuqtadan $AC \parallel \alpha$ to'g'ri chiziq o'tkazamiz. AA_1 va BB_1 to'g'ri chiziqlar bitta tekislikka perpendikular ikkita to'g'ri chiziq bo'lganligidan, ular o'zaro parallel bo'ladi hamda AA_1, BB_1 va *AB* lar bitta tekislikda yotadi.



15.14- chizma.

Shu sababli α tekislikka parallel *AC* to'g'ri chiziq BB, ni qandaydir C nuqtada kesib o'tadi. U holda A_1B_1 to'g'ri chiziq *AB* to'g'ri chiziqning α tekislikdagi proyeksiyasi bo'ladi va. $AC = A_1B_1$. Shuning uchun *AB* to'g'ri chiziq va α tekislik orasidagi φ burchak $\angle BAC$ ga teng bo'ladi: $\angle BAC = \varphi$.

Agar *A* — berilgan to'g'ri chiziq va tekislikning kesishish nuqtasi bo'lsa, berilgan tekislikka B nuqtadan BB_1 perpendikular tushkamiz. U holda AB_1 — to'g'ri chiziqning α tekislikka proyeksiyasi bo'ladi *vaAB* to'g'ri chiziq va α tekislik orasidagi burchak $\angle BAB_1 = \varphi$ bo'ladi.

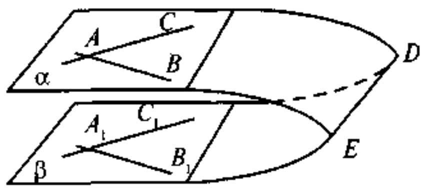
Parallel tekisliklar

4- t a' r i f. *Agar ikkita tekislik cheksiz davom ettirilganda ham kesishmasa,* ***ular parallel tekisliklar*** *deyiladi.*

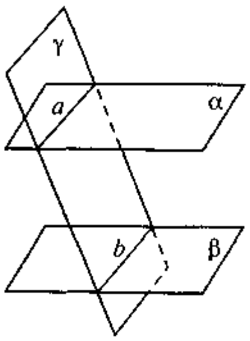
5-teorema (ikki tekislikning parallellik alomati). ***Agar α tekislikdagi ikkita kesishuvchi AB va AC to'g'ri chiziqlar β tekislikdagi ikkita kesishuvchi A_1B_1 va A_1C_1 to'g'ri chiziqlarga, mos ravishda, parallel bo'lsa, tekisliklar ham o'zaro parallel bo'ladi*** (14.8- chizma).

I s b o t i. Modomiki, $AC \parallel A_1C_1$, $A_1C_1 \subset \beta$ ekan, $AC \parallel \beta$ bo'ladi.

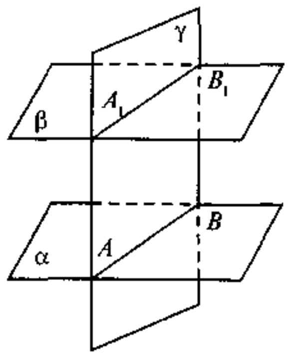
Shunga o'xshash, $AB \parallel \beta$, $A_1C_1 \parallel \alpha$, $A_1B_1 \parallel \alpha$ bo'ladi. Isbotni teskarisini faraz qilish yo'li bilan o'tkazamiz. α va β tekisliklar *DE* to'g'ri chiziq bo'ylab kesishsin, deb faraz qilamiz. U holda yuqorida isbotlangan teoremaga muvofiq, tekisliklar kesishgan *DE* to'g'ri chiziq bir vaqtning o'zida bitta A nuqta orqali o'tuvchi ikkita *AB* va *AC* to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi. Bunday bo lishi mumkin emas va demak, farazimiz noto'g'ri. Bundan $\alpha \parallel \beta$ ekani kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.



14.8- chizma.



14.9- chizma.



14.10- chizma.

Endi parallel tekisliklarning xossalarini qaraymiz.

6-1 e o r e m a. ***Agar ikkita parallel α va β tekislik uchinchi γ tekislik bilan kesishsa, ularning kesishish chiziqlari parallel bo'ladi***(14.9-chizma).

Isboti. A va β tekisliklar γ tekislik bilan *a* va *b* to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesishsin. Demak, *a va b* to'g'ri chiziqlar bitta γ tekislikda yotadi, lekin ular kesishmaydi, chunk! aks holda, α va β tekisliklar kesishishi lozim bo'ladi, bu esa shartga ziddir. Shunday qilib, *a va b* to'g'ri chiziqlar bitta tekislikda yotadi va kesishmaydi, demak, $a \parallel b$ ekan. Teorema isbotlandi.

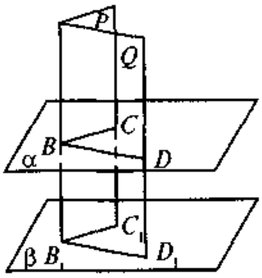
7-1 e o r e m a. ***Parallel to'g'ri chiziqlarningparallel tekisliklar orasida joylashgan kesmalari teng bo'ladi.***

Isboti. αvaβ — parallel tekisliklar hamda AA_1 va BB_1 — α va β tekisliklar orasida joylashgan parallel kesmalar bo'lsin (14.10-chizma). Kesmalarning *A* va B uchlari α tekislikda, A_1 va B_1 uchlari esa β tekislikda yotadi. Parallel AA_1 va BB_1 to'g'ri chiziqlar orqali, α va β tekisliklar bilan *AB* va ,A_1B_1 to'g'ri chiziqlar bo'yicha

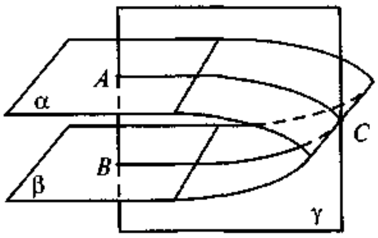
kesishadigan γ tekislik o'tkazamiz (6- teorema). U holda AA_1BB_1 to'rtburchak — parallelogramm bo'ladi va shu sababli $AA_1 = BB_1$. Teorema isbotlandi.

8-1 e o r e m a. ***Agar to'g'ri chiziq parallel α va β tekisliklarning biriga perpendikular bo'lsa, ularning ikkinchisiga ham perpendikular bo'ladi.***

Isboti. BB_1 to'g'ri chiziq orqali parallel tekisliklarni parallel $BC \parallel B_1C_1$, $CD \parallel C_1D_1$ to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesadigan ikkita har xil *P* va *Q* tekislik o'tkazamiz (14.11- chizma). Shartga ko'ra $BB_1 \perp \alpha$, shu sababdan $BB_1 \perp BC$ va $BB_1 \perp BD$ bo'ladi. U holda BB_1 to'g'ri chiziq B_1C_1 va B_1D_1 to'g'ri chiziqlarga ham perpendikular bo'ladi. To'g'ri chiziq va tekislikning perpendikularlik alomatiga ko'ra, $BB_1 \perp \beta$ bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.



14.11- chizma.



14.12- chizma.

9-teorema (teskari teorema). ***Agar ikki tekislik bitta to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lsa, ular o'zaro parallel bo'ladi.***

Isboti. α,β tekisliklar berilgan va $AB\perp\alpha$, $AB\perp\beta$ bo'lsin (14.12- chizma). Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni α va β tekisliklar kesishsin. AB to'g'ri chiziq va α , β tekisliklar kesishish chizig'ining ixtiyoriy Cnuqtasi orqali γ tekislik o'tkazamiz. γ tekislik α tekislikni *AC to'g'ri* chiziq bo'yicha, β tekislikni esa *BC*to'g'ri chiziq bo'yicha kesib o'tadi. $AB\perp\alpha$ bo'lganligidan,' $AB\perp AC$ bo'ladi. Shunday qilib, γ tekislikda *C* nuqtadan *AB* to'g'ri chiziqqa ikkita *CA* va CB perpendikularlar o'tkazildi, bunday bo'lishi mumkin emas. Demak, α va β tekisliklar parallel. Teorema isbotlandi.

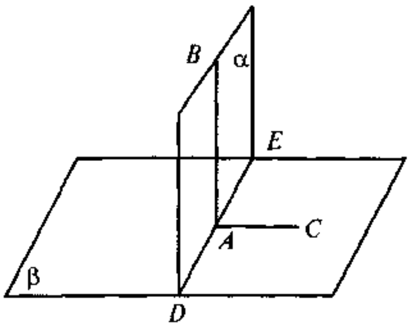
Perpendikular tekisliklar

6-1 a' r i f. *Agar ikkita tekislik o 'zaro kesishganda ikki yoqli to'g'ri burchak hosil qilsa, ular* ***o'zaro perpendikular*** *tekisliklar deyiladi.*

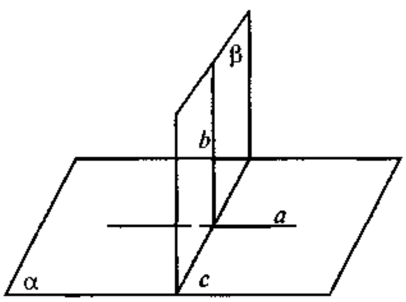
8-teorema (ikki tekislikning perpendikularlik alomati). ***Agar α tekislik boshqa β tekislikka perpendikular bo'lgan AB to'g'ri chiziq orqali o'tsa, α tekislik β tekislikka perpendikular bo'ladi.***

Isboti. α vaβ tekisliklar *DE* to'g'ri chiziq bo'ylab kesishsin (15.11- chizma). β tekislikda *A* nuqta orqali *DE* to'g'ri chiziqqa perpendikular *AC* to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Shartga ko'ra, $AB\perp\beta$ bo'lganligidan, $AB\perp DE$ va bo'ladi. $AE\perp AC$. Demak,— $\angle BAC$ to'g'ri burchakdan iborat. U holda unga mos *BDEC* ikki yoqli burchak ham to'g'ri burchakdan iborat. Ya'ni α va β tekisliklar o'zaro perpendikular bo'ladi. Teorema isbotlandi.

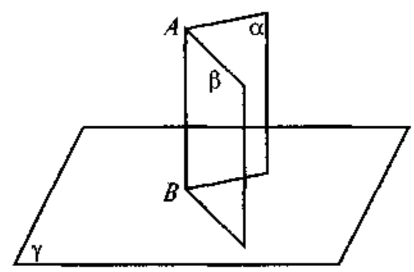
9- t e o r e m a. ***Ikkita perpendikular tekislikning biri-da yotuvchi to'g'ri chiziq, shu tekisliklar kesishgan to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lsa, u ikkinchi tekislikka ham perpendikular bo'ladi.***



15.11- chizma.



15.12- chizma.



15.13- chizma.

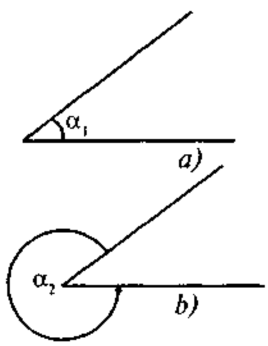
Isboti. $\alpha\perp\beta$ va ular *c* to'g'ri chiziq bo'ylab kesishsin, ya'ni $\alpha\cap\beta=c$ (15.12- chizma). β tekislikda $b\perp c$ to'g' ri chiziq o'tkazil-gan va $b\perp\alpha$ ekanligini isbotlash talab qilinadi.

α tekislikda b to'g'ri chiziq va α tekislik kesishgan nuqtadan $a \perp c$ to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. a va b to'g'ri chiziqlarning har ikkalasi ham α va β tekisliklar o'zaro kesishadigan c to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'ladi. Demak, a va b to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak α va β tekisliklar orasidagi burchakka teng. Shartga ko'ra, $\alpha \perp \beta \sim$ bo'lganligidan, *a va b* to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak 90° ga teng bo'ladi. Shunday qilib, b to'g'ri chiziq α tekislikda yotuvchi ikkita c va α to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lishi va, demak, b to'g'ri chiziq α tekislikning o'ziga ham perpendikular bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.
N a t i j a. *Agar ikkita* α *va* β *tekislik uchinchi* γ *tekislikka perpendikular bo 'Isa, ular kesishadigan to 'g'ri chiziq* γ *tekislikka perpendikular bo'ladi* (15.13- chizma).

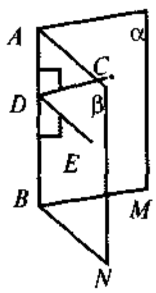
11. Tekisliklar orasidagi burchak. Ikkiyoqli burchak. Ikkiyoqli burchakning chiziqli burchagi. Parallel tekisliklar orasidagi burchak.

Ikki yoqli burchak

Planimetriyada tekislikdagi burchak deb, bitta umumiy uchga ega ikkita nur va tekislikning ular bilan chegaralangan qismidan hosil bo'lgan shaklga aytiladi, ya'ni bunda α_1 va α_2 lar uchun ikki hoi kuzatilishi mumkin (15.9- α, *b* chizmalar).
Ma'lumki, tekislikdagi ixtiyoriy to'g'ri chiziq uni ikkita yarim tekislikka bo'ladi.
Berilgan α va β tekisliklar *AB* to'g'ri chiziq bo'yicha kesishsin (15.10-chizma).
5-1 a' r i f. *Bitta AB to'g'ri chiiiqdan chiquvchi ikkita* α *va* β *yarim tekislikdan tashkil topgan shakl* ***ikki yoqli burchak*** *deyiladi.*
AB to'g'ri chiziq ikki yoqli burchakning *qirrasi,* α va β tekisliklar esa ikki yoqli burchakning *yoqlari* yoki *tomonlari* deyiladi.
Ikki yoqli burchak to'rtta harf bilan ifodalanadi, ulardan ikkitasi qirrada, yana ikkitasi ikki yoqli burchakning yoqlarida bo'ladi. Masalan, *MABN* ikki yoqli burchak(15.10- chizma).
Ikki yoqli burchak *AB* qirrasining ixtiyoriy nuqtasidan uning har bir yog'ida qirrasiga perpendikular bittadan to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz, ya'ni $CD \perp AB,\ CD \subset \alpha$ va $DE \perp AB,\ DE \subset \beta$. Hosil bo'lgan $\angle CDE$ — ikki yoqli burchakning *chiziqli burchagi* deyiladi.
CD va *DE* to'g'ri chiziqlar o'zaro kesishadi va shuning uchun ular bitta tekislikda yotadi.
Modomiki, $AB \perp CD,\ AB \perp DE$ экan, AB qirra *(CDE*) tekislikka perpendikular bo'ladi. Bundan ikki yoqli burchakning chiziqli burchagini yasash uchun *AB* qirraning ixtiyoriy *D* nuqtasidan *AB* qirraga perpendikular tekislik o'tkazish yetarli. Bu tekislikning ikki yoqli burchak yoqlari bilan kesishish



15.9- chizma.



15.10- chizma.

chiziqlari hosil qilgan $\angle CDE$ berilgan ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi bo'ladi.
Planimetriyada ko'rib o'tilgani kabi, quyidagi burchaklar xillarini qarash mumkin:
1. Bitta yog'i umumiy, qolgan ikkita yog'i bitta tekislikning ikkita yarim tekisligini tashkil etuvchi qo'shni ikki yoqli burchaklar.
2. Ikkita ikki yoqli burchakning yoqlari ikkita tekislikning to'ldiruvchi yarim tekisliklari bo'lgan vertikal ikki yoqli burchaklar.
Agar qo'shni ikki yoqli burchaklar o'zaro teng bo'lsa, ularning har biri *to'g'ri ikki yoqli burchak* deyiladi.

Ikki yoqli burchak chiziqli burchakka keltirilganligidan, ikki yoqli burchaklarning quyidagi xossalari o'rinli:
1) teng ikki yoqli burchaklarga teng chiziqli burchaklar mos keladi;
2) katta ikki yoqli burchakka katta chiziqli burchak mos keladi;
3) barcha to'g'ri ikki yoqli burchaklar o'zaro teng;
4) vertikal ikki yoqli burchaklar o'zaro teng.

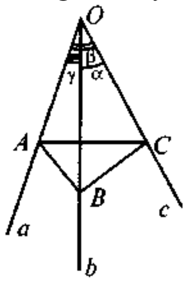
12. Ko'pyoqli burchaklar. Ko'pyoqli burchaklarning tekis va ikkiyoqli burchaklari orasidagi bog'liqlik. Burchak o'lchash asboblari. Chizma geometriya elementlari. *Shakllarni chizmada tasvirlash. *Aksonometriya. Ko'pyoqli burchaklar. * Ko'pyoqli burchaklarning tekis va ikkiyoqli burchaklari orasidagi bog'liqlik.Fazoviy burchak.

Uch yoqli burchak

Fazodagi ixtiyoriy *O* nuqtadan bitta tekislikda yotmaydigan uchta *α, b, c* yarim to'g'ri chiziq o'tkazilgan bo'lsin. Bu yarim to'g'ri chiziqlar juft-juft ravishda uchta (αb), (be), (αc) yassi burchak tashkil qiladi (15.15- chizma).

8-1 a' r i f. *Uchta yassi burchakdan va har bir yarim to'g'ri chiziqlar juftlari orasidagi yarim tekisliklarning qismlaridan tashkil topgan shakl* ***uch yoqli burchak*** *deyiladi.*

S — uch yoqli burchakning *uchi, a, b, c* yarim to'g'ri chiziqlar uning *qirralari,* tekis burchaklar va qirralar bilan chegaralangan tekisliklar qismlari uch yoqli burchakning *yoqlari (tomonlari)* deyiladi. Uch yoqli burchaklar tomonlarining (yoqlarining) har bir jufti ikki yoqli burchak hosil qiladi. Ular *a* qirradagi, b qirradagi va *c* qirradagi ikki yoqli burchaklardir.



15.15- chizma.

10- t e o r e m a (kosinuslar formulasi). ***Agar α, β, γ — uch yoqli burchakning yassi burchaklari, A, B, C — ular qarshisidagi ikki yoqli burchaklar bo'lsa,***

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos C$$

munosabat bajariladi.

I s b o t i. Uch yoqli burchakning *c* qirrasida ixtiyoriy *C* nuqtani olamiz va $CB \perp c$, $CA \perp c$ to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz
(15.15-chizma), bunda *A* va B nuqtalar *CA* va CB perpendikularlarning *a* va *b* qirralar bilan kesishgan nuqtalaridir. *A* va B nuqtalarni tutashtirib, ΔABC ni hosil qilamiz. Kosinuslar teoremasiga ko'ra, ΔABC dan $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$ va ΔABO dan

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos\gamma$$

munosabatlarga ega bo'lamiz. Bu tengliklarning ikkinchisidan birinchisini ayiramiz:

$$AO^2 + BO^2 - AC^2 - BC^2 + 2AC \cdot BC \cdot \cos C - 2AO \cdot BO \cdot \cos\gamma = 0. \quad (1)$$

ΔABC va ΔABO to'g'ri burchakli bo'lganligidan,

$$AO^2 - AC^2 = OC^2 \text{ va } BO^2 - BC^2 = OC^2 \qquad (2)$$

bo'ladi. U holda (1) va (2) tengliklardan $AO \cdot BO \cdot \cos\gamma = OC^2 + AC \cdot BC \cdot \cos C$ ifodani hosil qilamiz. Lekin

$$\frac{OC}{AO} = \cos\beta, \quad \frac{OC}{BO} = \cos\alpha, \quad \frac{AC}{AO} = \sin\beta, \quad \frac{BC}{BO} = \sin\alpha$$

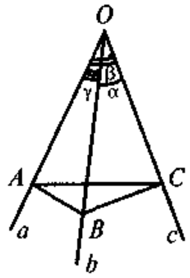
ekanligini hisobga olsak, talab qilingan

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos C \qquad (3)$$

formulani olamiz. (3) tenglik uch yoqli burchak uchun *kosinuslar formulasi* deyiladi.
11-teorema (sinuslar formulasi). ***Agar α, β, γ — uch yoqli burchakning yassi burchaklari, A, B, C — ular qarshisidagi ikki yoqli burchaklar bo'lsa*** (15.16- chizma),

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C} \quad (4)$$

tenglik bajariladi.



15.16- chızma.

I s b o t i. (3) kosinuslar formulasidan cosC ni topamiz:

$$\cos C=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Endi bizga ma'lum formuladan

$$\sin^2 C=1-\cos^2 C=1-\frac{(\cos\gamma-\cos\alpha\cdot\cos\beta)^2}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta-(\cos\gamma-\cos\alpha\cdot\cos\beta)^2}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}=$$

$$=\frac{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)-(\cos\gamma-\cos\alpha\cdot\cos\beta)^2}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}=$$

$$=\frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Oxirgi tenglikning ikki tomonini sin^ ga bo'lamiz:

$$\frac{\sin^2 C}{\sin^2\gamma}=\frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma}. \quad (5)$$

(5) tenglikning o'ng tomoni α, β, γ miqdorlarga nisbatan simmetrikdir. Agar nisbatlarni ham hisoblasak,

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2\alpha} \text{ va } \frac{\sin^2 B}{\sin^2\beta}$$

o'ng tomonda (5) ningo'ng tomonidagi ifodani hosil qilamiz. Shu sababli bu nisbatlar o'zaro teng:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2 B}{\sin^2\beta}=\frac{\sin^2 C}{\sin^2\gamma}.$$

(4) formula *sinuslar formulasi* deyiladi.
Natijalar: 1. *Uchyoqliburchakningharbiryassiburchagi uning qolgan ikkita yassi burchagi yig'indisidan kichik.*
2. Uch yoqli burchak yassi burchaklarining yig'indisi 360° dan kichik.

13. Ko'pyoqlik tushunchasi. Eyler teoremasi. Ko'pyoqliklarning kesimlari.

Fazoviy jismlar

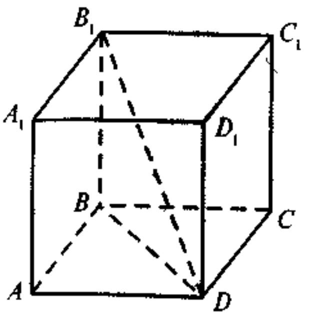
Stereometriyaning eng muhim obyektlari hech qanday tekislikda yotmaydigan fazoviy jismlar, masalan, shar, sfera, kub, parallelepiped, prizma, piramida, konus, silindr kabilar hisoblanadi. Geometrik jismlarning katta gunihini ko'pyoqlar tashkil qiladi.

1. Ko'pyoqlar. Sirti chekli sondagi ko'pburchaklardan iborat jism *ko'pyoq* deyiladi. Ko'pyoqni chegaralovchi ko'pburchaklar uning *yoqlari* deyiladi. Ko'pyoq qo'shni yoqlarining umumiy tomonlari uning *qirralari* deyiladi. Ko'pyoqning bitta nuqtada uchrashadigan yoqlari ko'p yoqli burchak tashkil qiladi va bunday ko'p yoqli burchaklarning uchlari ko'pyoqning *uchlari* deyiladi. Ko'pyoqning bitta yog'ida yotmagan ixtiyoriy ikkita uchini tutashtiruvchi to'g'ri chiziqlar uning *diagonallari* deyiladi. O'zining har bir yog'i tekisligining bir tomonida joylashgan ko'pyoq *qavariq ko'pyoq* deyiladi. Masalan, prizma, kub, parallelepiped, piramida qavariq ko'pyoqlardir.

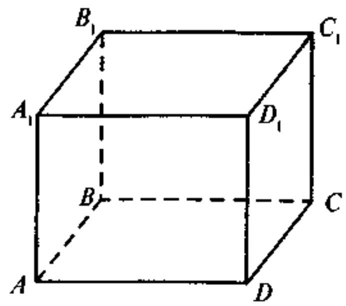
Endi ko'pyoqlarning ba'zilarini qarab chiqamiz.

Kub — barcha yoqlari kvadratlardan iborat ko'pyoqdir. Kubning yon yoqlari kesishadigan AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 kesmalar kubning *yon qirralari,* AB, BC, CD, DA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 lar esa kub *asoslarining qirralari* deyiladi (13.2- chizma). Kubning uchta yog'i kesishadigan A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 nuqtalar uning *uchlari* deyiladi.

Parallelepiped — barcha yoqlari parallelograrnmlardan iborat ko'pyoqdir (13.3- chizma). Yon yoqlari to'g'ri to'rtburchaklardan iborat parallelepiped to'g'ri parallelepiped, hamma yoqlari to'g'ri to'rtburchaklardan iborat parallelepiped *to'g'ri burchakli parallelepiped* deyiladi. Parallelepipedning qirralari va uchlari tushunchalari kubniki kabidir.



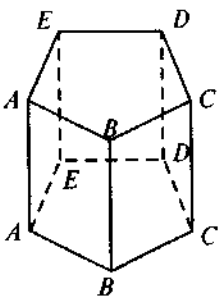
13.2- chizma.



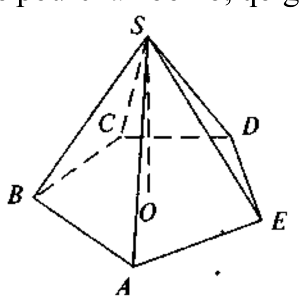
13.3- chizma.

Prizma — asoslar deb ataladigan ikki yog'i parallel tekisiiklarda yotuvchi, qolgan yoqlari parallelogrammlardan iborat ko'pyoqdir (13.4- chizma). Yon yoqlari asosga perpendikular bo'lsa, prizma *to'g'ri prizma* deyiladi. Asoslari muntazam ko'pburchaklar bo'lib, yon yoqlari to'g'ri to'rtburchaklardan iborat bo'lgan prizma *muntazam prizma* deyiladi.

Piramida — asos deb ataladigan bitta yog'i ixtiyoriy ko'pburchak bo'lib, qolgan



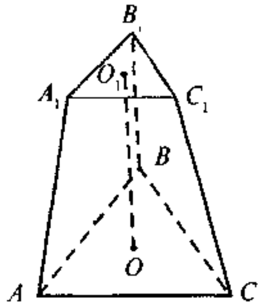
13.4- chizma.



13.5- chizma.

yoqlari ketma-ket, juft-juft kesishaαigan umumiy uchga ega uchburchaklar bo'lgan kcypyoqdan iborat (13.5-chizma). Barcha uchburchaklar uchun umumiy *S* nuqta — piramidaning *uchi, ASB, BSC, CSD, DSE, ESA* uchburchaklar uning *yon yoqlari, . ABCDE* ko'pburchak uning *asosi* deyiladi. *S* uchdan asosga tushirilgan *SO* perpendikular — piramidaning *balandligi* deyiladi.

Agar piramidaning asosi muntazam ko'pburchak bo'lib, piramidaning *SO* balandligi asosining markazi orqali o'tsa, piramida *muntazam piramida* deyiladi. Muntazam piramida yon yog'ining balandligi uning *apofemasi* deyiladi.Agar piramida asosiga parallel tekislik bilan kesilsa va uning $ABCA_1B_1C_1$ qismi qaralsa (13.6- chizma), bu qism *kesik piramida*deyiladi.



13.6- chizma.

Ko'pyoqning yoqlari soni *Y,* uchlari soni *U va* qirralari soni *Q* lar orasidagi bog'liqlik quyidagi teorema orqali beriladi.
1-t eorema (Eyler). ***Ixtiyoriy n yoq uchun Y+ U-Q=2 munosabat bajariladi.***
Quyidagi jadvaldan buni yaqqol ko'rish mumkin:

Ko'pyoq	Y	U	Q
Tetraedr	4	4	6
Parallelepiped	6	8	12
Olti burchakli prizma	8	12	18
O'n bir yoq	11	11	20
O'n ikki yoq	12	18	28

2- t eorema. ***Ko'pyoq tekis burchaklarining soni uning qirralari sonidan ikki marta ko'p.***
Nat i j alar.
1. *Ko 'pyoq tekis burchaklarining soni har doim juftdir.*
2. *Agar ko 'pyoqning har bir uchida bir xil k sondagi qirralar tutashsa,*

$$U \cdot k = 2Q$$

munosabat o 'rinli.
3. *Agar ko'pyoqning barcha yoqlari bir xil n tomonli ko 'pburchaklardan tashkil topgan bo 'Isa,*

$$Y \cdot n = 2Q$$

munosabat o 'rinli.
3-1 teorema. ***Yoqlari soni Y va qirrralari soni Q bo'lgan ko'pyoq tekis burchaklarining yig'indisi uchun***

$$360^\circ\ (Y - Q)$$

munosabat bajariladi.
Agar ko'pyoq modelini tayyorlash talab qilinsa, u tekis ko'pburchaklarni — ko'pyoqning yoqlarini bir-biriga yopishtirish natijasida hosil qilinadi. Bunda faqat ko'pburchaklar majmuyiga ega bo'libgina qolmasdan, qaysi ko'pburchaklarni o'zaro yopishtirish zarurligini ham bilish lozim bo'ladi.Biror ko'pyoq yoqlariga teng ko'pburchaklar majmuyi, qaysi tarafini, mos ravishda, yopishtirish kerakligi ko'rsatilgan holda, ko'pyoqning yoyilmasi deyiladi.Ko'pyoq berilganda uning yoyilmasini yasash mumkin. Teskari masala esa, ya'ni berilgan yoyilma bo'yicha ko'pyoqni yasash, quyidagi shartlar bajarilganda yechimga ega bo'ladi:
1) yoyilmaning har bir tomoniga qolgan tomonlarning faqat bittasi mos kelishi;
2) agar α va β yoqlari umumiy *A* uchga ega bo'lsa, qolgan yoqlardan faqat o'sha A uchga ega bo'lganlarini tanlab olish zarur;

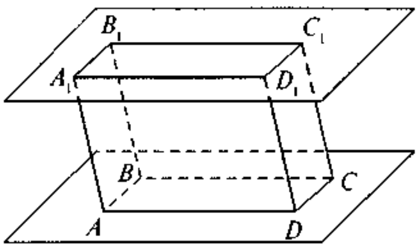
3)yoqlarni bir-biriga yopishtirish ketma-ketligi ko'rsatilishi mumkin bo'lishi;
4) yoyilmaning uchlari, yoqlari va qirralari soni Eyler tenglamasini qanoatlantirishi, ya'ni
$Y+U-Q=2$ shart bajarilishi;
5) ko'pburchaklarning yopishtiriladigan tomonlari bir xil uzunliklarga ega bo'lishi;
6) yoyilmaning har bir uchida tekis burchaklarning yig'indisi 360° dan kichik bo'lishi.

2. Muntazam ko'pyoqlar. Agar beri,lgan ko'pyoq qavariq bo'lib, uning yon yoqlari o'zaro teng muntazam ko'pburchaklardan iborat bo'lsa hamda uning har bir uchida bir xil sondagi yoqlar tutashsa va uning barcha ikki yoqli burchaklari o'zaro teng bo'lsa, u *muntazam ko 'pyoq* deyiladi. Muntazam ko'pyoqlarning besh xili mavjud bo'lib, ularning har biri o'z nomiga ega.

Tetraedr — barcha yoqlari o'zaro teng muntazam uchburchak-lardan iborat uchburchakli piramida.
Kub — barcha yoqlari kvadratlardan iborat prizma.
Oktaedr — barcha sakkizta yog'i o'zaro teng muntazam uchburchaklardan iborat ko'pyoqdir. Uni asoslari kvadratlardan iborat bo'lib, yon yoqlari o'zaro teng muntazam uchburchaklar bo'lgan ikkita muntazam piramidani bir-biriga birlashtirish bilan yasash mumkin.
Ikosaedr — barcha yigirmata yog'i o'zaro teng muntazam uchburchaklardan iborat ko'pyoqdir.
Dodekaedr — barcha o'n ikkita yog'i o'zaro teng muntazam beshburchaklardan iborat ko'pyoqdir.

14. Parallelepiped, uning turlari va xossalari. Parallelepiped sirtining yuzi va hajmi.

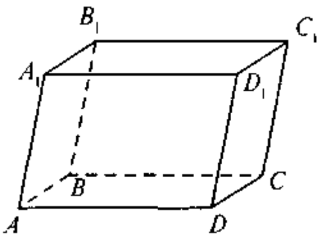
Asosiy tushunchalar. Ikkita o'zaro teng *ABCD* va $A_1B_1C_1D_1$ parallelogramm ikkita parallel tekislikda shunday joylashgan bo'lsinki, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 kesmalar o'zaro parallel bo'lsin (19.1- chizma). U holda qarama-qarshi tomonlari o'zaro parallel to'rtburchaklar sifatida, ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DAA_1D_1 to'rtburchaklar ham parallelogrammlar bo'ladi.
1-t a' r i f. *Ikkita yog'i ikkita parallel tekisliklarda yotgan o 'zaro teng parallelogrammlar, qolgan barcha yoqlari shu berilgan parallelogrammlarning mos tomonlari orqali o'tuvchi parallelogrammlardan iborat ko 'pyoq* ***parallelepiped*** *deyiladi.*
Parallelepiped yasalgan parallelogrammlar uning *yoqlari,* ularning tomonlari — parallelepipedning *qirralari,* parallelogrammlarning uchlari parallelepipedning *uchlari* deyiladi. Demak, parallelepipedning oltita yog'i, o'n ikkita qirrasi va sakkizta uchi bor. Parallelepipedning bitta qirrasi orqali o'tadigan yoqlari *qo 'shni yoqlar deb* ataladi. Umumiy nuqtalarga ega bo'lmagan yoqlar *qarama-qarshi yoqlar,* parallelepipedning bitta yog'ida yotmagan ikkita uchi *qarama-qarshi uchlar* deyiladi (masalan, *A* va C_p *D* va B, va h.k.). Parallelepipedning qarama-qarshi uchlarini tutashtiruvchi kesmalar uning *diagonallari* deyiladi (masalan, AC_1, DB_1, CA_1, BD_1 kesmalar).
Parallelepipedning to'rtta diagonal! bor. Parallelepipedning ixtiyoriy ikkita qarama-qarshi yog'ini asoslar deb atasak, uning qolgan yoqlari yon yoqlari bo'ladi.
Parallelepipedlar uch xil bo'ladi:
a) og'ma parallelepiped, uning barcha yoqlari parallelogrammlardan iborat;
b) to'g'ri parallelepiped, uning yon qirralari asos tekisli-giga perpendikular bo'ladi;
d) to'g'ri burchakli parallelepiped, uning barcha yoqlari to'g'ri to'rtburchaklardan iborat.



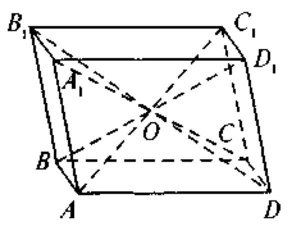
19.1- chizma.

Parallelepipedning xossalari.
1-1 e o r e m a. ***Parallelepipedning qarama-qarshi yoqlari teng va o'zaro parallel bo'ladi.***

I s b o t i. Bizga barcha yoqlari parallelogrammdan iborat bo'lgan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepiped (19.2- chizma) berilgan bo'lsin. U holda AA_1D_1D parallelogrammda $AA_1 \parallel DD_1$, $AA_1 = DD_1$, $AD \parallel A_1D_1$, $AD = A_1D_1$; BB_1C_1C parallelogrammda $BC \parallel B_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $BB_1 \parallel CC_1$, $BB_1 = CC_1$; $ABCD$ parallelogrammda $AD \parallel BC$, $AD = BC$, $AB \parallel CD$, $AB = CD$ bo'ladi. Shunday qilib, AA_1D va B_1BC burchaklarning mos tomonlari yo'nalishdosh va, demak, ular o'zaro tengdir: $\angle A_1AD = \angle B_1BC$. AA_1D_1D parallelogrammning ikkita qo'shni tomoni va ular orasidagi burchagi BB_1C_1C parallelogrammning ikkita qo'shni tomoni va ular orasidagi burchagiga tengdir. Demak, AA_1D_1D va BB_1C_1C parallelogrammlar o'zaro teng. Bu yoqlar o'zaro parallel hamdir, chunk! AA_1D_1D yoqning ikkita o'zaro kesishuvchi AA_1 va AD tomonlari, mos ravishda, BB_1C_1C yoqning BB_1 va BC tomonlariga parallеldir.
Parallelepipedning qolgan qarama-qarshi yoqlari juftliklarining parallelligi shunga o'xshash isbotlanadi.
2-teorema. ***Parallelepipedning diagonallari bitta nuqtada kesishadi va bu nuqtada teng ikkiga bo'linadi.***
I s b o t i. Bizga barcha yoqlari parallelogrammlardan iborat $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepiped berilgan bo'lsin (19.3-chizma). Unda: *ABCD p*arallelogrammda $BC \parallel AD$ va $BC = AD$; BB_1C_1C.
Parallelogrammda $BC \parallel B_1C_1$ va $BC = B_1C_1$ bo'ladi. Shuning uchun $B_1C_1 \parallel AD$ va $B_1C_1 = AD$, demak, AB_1C_1D to'rtburchak parallelogrammdan iborat. Bu parallelogrammning AC_1 va B_1D diagonallari *O* nuqtada kesishadi va bu nuqtada teng ikkiga bo'linadi. Endi parallelepipedning DCC_1D_1 va $A_1B_1C_1D_1$ yoqlarini qaraymiz. Ular parallelogrammlar bo'lganligidan, $A_1B_1 \parallel C_1D_1$, $A_1B_1 = C_1D_1$ va $C_1D_1 \parallel CD$, $C_1D_1 = CD$ bo'ladi. U vaqtda $A_1B_1 \parallel CD$

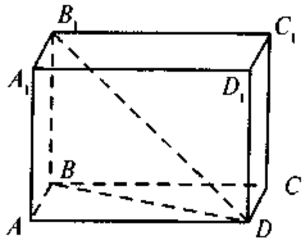


19.2- chizma.



19.3- chizma.

va $A_1B_1 = CD$ bo'lishini olamiz. Demak, CDA_1B_1 to'rtburchak ham parallelogrammdan iborat va uning A_1C, B_1D diagonallari bitta *O* nuqtada kesishadi va bu nuqtada teng ikkiga bo'linadi. Modomiki, B_1D kesma yagona *0* o'rta nuqtaga ega ekan, biz parallelepipedning uchta A_1C, AC_1 va B_1D diagonallari bitta nuqtada kesishishi va bu nuqtada ular teng ikkiga bo'linishini isbotladik. Yuqoridagiga o'xshash, $A_1D_1C_1B_1$ to'rtburchakni qarab, to'rtinchi BD_1 diagonalning ham *O* nuqtadan o'tishi va bu nuqtada teng ikkiga bo'linishini isbotlash mumkin.
1 - n a t i j a. *Parallelepipedning diagonallari kesishadigan nuqta uning simmetriya markazidan iborat.*
3-teorema. ***To'g'ri burchakli parallelepiped ixtiyoriy diagonalining kvadrati uning uchta o'lchamlari kvadratlari yig'indisiga teng.***
I s b o t i. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ to'g'ri burchakli parallelepipedning
barcha yoqlari (19.4- chizma) to'g'ri to'rtburchaklardir. Shu sababli uning asosida yotgan *ABCD* to'g'ri to'rtburchakda *AC va BD* diagonallar o'zaro teng: *AC = BD.* U holda parallelepipedning diagonallari, teng proyeksiyalarga ega og'malar sifatida, o'zaro tengdir: $AC_1 = A_1C = B_1D = BD_1$. Shuning uchun teoremani faqat bitta diagonal uchun isbotlash yetarli.To'g'ri burchakli ΔBB_1D dan Pifagor teoremasiga ko'ra, $B_1D^2 = BD^2 + BB_1^2$, to'g'ri burchakli ΔABD dan esa $BD^2 = AB^2 + AD^2$ ifodani hosil qilamiz. Agar $BB_1 = AA_1$ ekanini hisobga olsak, to'g'ri burchakli parallelepipedning diagonal! uchun talab qilingan $B_1D^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$ ifodani olamiz. Teorema isbotlandi. Oxirgi tenglikni 4 ga ko'paytirib, $4B_1D^2 = 4AB^2 + 4AD^2 + 4AA_1^2$ munosabatni hosil qilamiz. To'g'ri burchakli parallelepipedning barcha to'rtta diagonal o'zaro teng bo'lganligidan, bu tenglikni parallelogramm diagonallari-ning xossasiga o'xshash xossa sifatida ifodalash mumkin.



19.4- chizma.

Parallelepiped sirtining yuzi. Parallelepiped yon sirtining yuzi deb, uning barcha yon yoqlari yuzlarining yig'indisiga, to'la sirtining yuzi deb, uning yon sirtining yuzi bilan asoslari yuzlarining yig'indisiga aytiladi.

$$S = S_{yon} + 2S_{asos}.$$

4- t e o r e m a. ***To'g'ri parallelepiped yon sirtining yuzi asosining perimetri bilan parallelepiped balandligining ko'"-paytmasiga teng:***

$$S_{yon} = P_{asos} \cdot H.$$

I s b o t i. To'g'ri parallelepipedning yon yoqlari to'g'ri to'rtburchaklardir (19.5-chizma). Agar asosning tomonlarini $AD = a$, $AB — b$ va parallelepiped balandligini $AA_1 = H$ deb qabul qilsak, uning yon sirti

$$S_{yon} = 2 \cdot a \cdot H + 2 \cdot b \cdot H$$

va

$$S_{yon} = 2(a + b)H$$

bo'ladi. Parallelepiped asosining perimetri

$$P_{asos} = 2(a + b)$$

bo'lganligidan, to'g'ri parallelepipedning yon sirti yuzi uchun talab qilingan,

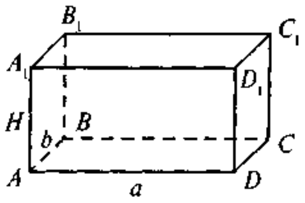
$$S_{yon} = P_{asos} \cdot H$$

formulani hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

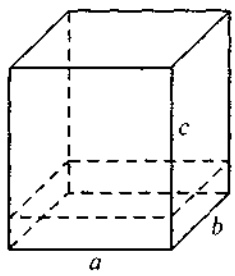
To'g'ri burchakli parallelepipedning hajmi.

5-1 e o r e m a. ***To'g'ri burchakli parallelepipedning hajmi uning uchta o'~lchami: uzunligi a, eni b va balandligi c ko'paytmasiga teng:***

$$V=a \cdot b \cdot c.$$



19.5- chizma.



19.6- chizma.

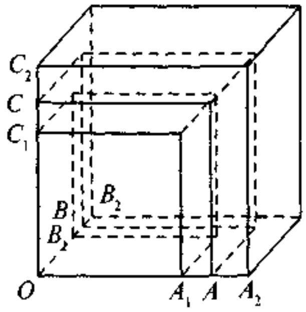
I s b o t i. Uchta holni tahlil qilamiz.

1 - h o 1. *a, b, c* lar butun sonlar bo'lsin. *a, b, c* qirralarning har birini birlik kesmalarning butun soniga bo'lib chiqamiz (19.6-chizma). So'ngra bo'linish nuqtalaridan parallelepipedning yoqlariga parallel tekisliklar o'tkazamiz. Natijada parallelepiped birlik kublarga bo'linadi (ya'ni chiziqli o'lchamlari 1 ga teng bo'lgan kublar). LJ holda parallelepipedning asosidagi birinclii qatorda bunday kublarning soni $a \cdot b$ ta bo'ladi. Modomiki, parallelepipedning balandligi *c* ga teng ekan, bunday qatorlarning soni *c* ta bo'ladi. Shunday qilib, parallelepipedning hajmi $V=a \cdot b \cdot c$ bo'ladi.

2- h o 1. Parallelepipedning *a, b, c* o'lchamlari kasr sonlar orqali ifodalangan bo'lsin. Bu kasrlarni umumiy maxrajga keltiramiz, u holda ular $\frac{A}{n}, \frac{B}{n}, \frac{C}{n}$ ko'rinishda yoziladi. Endi o'lchamlar butun sonlar bilan ifodalanishi uchun, eski o'lchov birligining $\frac{1}{n}$ qismiga teng bo'lgan yangi o'lchov birligi kiritamiz. Buning natijasida hajm birligi ham o'zgarib, eski hajm birligining $\frac{1}{n^3}$ qismiga teng bo'ladi. Natijada hajm uchun $V=\frac{A}{n}\cdot\frac{B}{n}\cdot\frac{C}{n}$ yoki $V=a\cdot b\cdot c$ ifodani hosil qilamiz.

3- h o 1. To'g'ri burchakli parallelepipedning o'lchamlari *OA = a, OB=b, OC—c* irratsional sonlar bilan ifodalangan bo'lsin (19.7- chizma). Irratsional son cheksiz o'nli kasr bo'lishi mumkin. Bu kasrlarning *n* ta o'nli raqamli taqribiy qiymatlarini, awal kami bilan a_n, b_n, c_n ko'rinishda, so'ngra ko'pi bilan a_n', b_n', c_n' ko'rinishda olamiz. Bu kesmalarni parallelepipedning qirralarida *O* nuqtadan boshlab joylashtiramiz: $OA_1=a_n$, $OB_1=b_n$, $OC_1=c_n$ va $OA_2=a_n'$, $OB_2=b_n'$, $OC_2=c_n'$. Bunda

$OA_1<OA<OA_2$, $OB_1<OB<OB_2$, $OC_1<OC<OC_2$ munosabatlar bajariladi. So'ngra biz ikkita qo'shimcha parallelepiped yasaymiz. Ulardan birining qirralari OA_1, OB_1, OC_1, ikkinchisiniki esa OA_2, OB_2, OC_2 bo'ladi. Bunda ularning birinchisi berilgan parallelepipedning ichida yotadi, ikkinchisi esa berilgan paral-lelepipedni o'z ichida saqlaydi.



19.7- chizma.

Yangi hosil qilingan parallelepipedlarning o'lchamlari ratsional sonlar bilan ifodalanganligidan, ularning V_1 va V_2 hajmlari, mos ravishda, $V_1=a_nb_nc_n$ va $V_2=a_n', b_n', c_n'$ bo'ladi hamda $V_1<V_2$ munosabat o'rinli. Berilgan parallelepipedning hajmi V uchun $V_1<V<V_2$ tengsizlik bajariladi. Endi biz *n* ni cheksiz orttirib boramiz. Buning natijasida V_1 hajm ortib boradi, V_2 hajm esa kamayib boradi. Algebradan ma'lumki, ular umumiy limitga ega bo'ladi va bu limit *a, b, c* irratsional sonlarning ko'paytmasiga teng, ya'ni *V=a·b·c.*

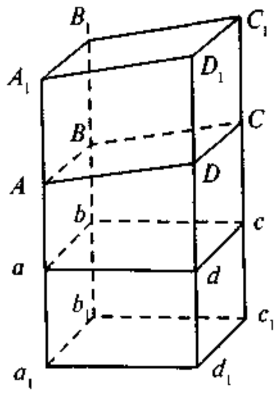
Teorema isbotlandi.

2- n a t i j a. *To 'g'ri burchakliparallelepipedning hajmi asosining yuzi bilan balandligining ko 'paytmasiga teng:*

$$V=S_{\text{asos}}\cdot H$$

Lemma. ***Og'ma parallelepipedning hajmi shunday to'g'ri parallelepipedning hajmiga tengki, uning asosi og'ma parallelepipedning perpendikular kesimidan iborat, balandligi esa og'ma parallelepipedning yon qirrasiga tengdir.***

1 s b o t i. Berilgan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ og'ma parallelepipedning AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 yon qirralarini davom ettiramiz (19.8-chizma). AA_1 qirraning davomida ixtiyoriy *a* nuqtani olamiz va u orqali AA_1 to'g'ri chiziqqa perpendikular ravishda tekislik o'tkazamiz. Kesimda og'ma parallelepipedning perpendikular kesimidan iborat *abed* to'rtburchak hosil bo'ladi. AA_1 to'g'ri chiziqda *a* nuqtadan $aa_1=AA_1$ kesma ajratamiz.



19.8- chizma.

Endi $a_1b_1c_1d_1ABCD$ va $abcdA_1B_1C_1D_1$ ko'pyoqlarni qaraymiz. Ulardan birinchisi $abcda_1b_1c_1d_1$ to'g'ri parallelepiped va *abcdABCD* ko'pyoqdan, ikkinchisi esa $ABCDA_1B_1C_1D_1$ og'ma parallelepiped va *abcdABCD* ko'pyoqdan tashkil topganini ko'ramiz. Modomiki, *abcdABCD* ko'pyoq $a_1b_1c_1d_1$ *ABCD* va $abcdA_1B_1C_1D_1$ ko'pyoqlarning umumiy qismidan iborat ekan, bu yerdan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ og'ma parallelepiped va $abcda_1b_1c_1d_1$ to'g'ri parallelepipedlarning tengdosh bo'lishi kelib chiqadi. Endi *abed* — og'ma parallelepipedning perpendikular kesimi $aa_1 = AA_1$ ekanligidan, lemmaning isboti kelib chiqadi.

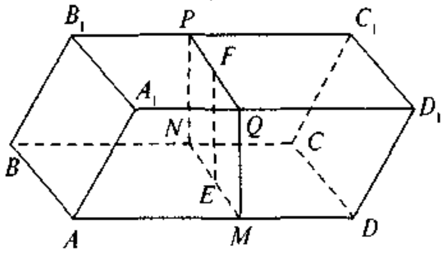
6- t e o r e m a. ***Parallelepipedning hajmi asosining yuzi bilan balandligi ho'paytmasiga teng.***

Isboti. Bizga *MNPQ* perpendikular kesim o'tkazilgan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ og'ma parallelepiped (19.9-chizma) berilgan bo'lsin. Bu parallelepiped asosi *MNPQ* to'rtburchakdan, balandligi esa *AD* qirraga teng bo'lgan to'g'ri parallelepipedga tengdoshdir. Uning hajmi uchun yuqorida isbotlanganiga ko'ra,

$$V = S_{MNPQ} \cdot AD$$

ifodaga ega bo'lamiz.

Agar *EF*kesma *MNPQ* to'rtburchakning balandligi bo'lsa, $V=EF\cdot MN\cdot AD$ bo'ladi. Modomiki, $EF \perp MN$ va *EF* parallelepiped perpendicular kesim tekisligida yotar ekan, *EF* parallelepipedning balandligidan iborat bo'ladi. Endi $MN \perp AD$ bo'lganligidan , $S_{asos} = MN \cdot AD$ o'rinli va parallelepipedning hajmi $V = S_{asos} \cdot EF$ yoki $V = S_{asos} \cdot H$ bo'ladi. Teorema isbotlandi.

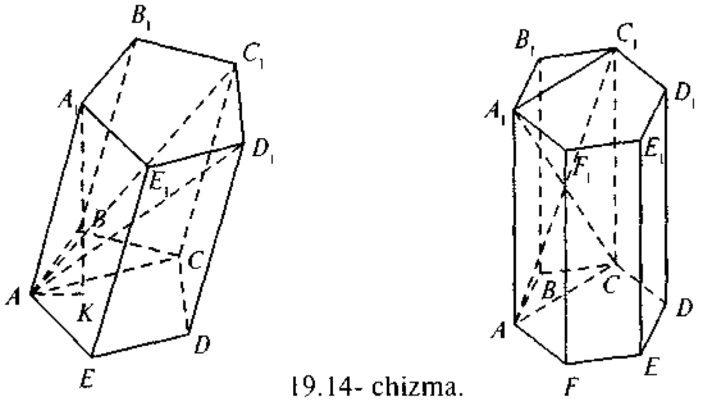


19.9- chizma.

15. Prizma, uning turlari va xossalari. Prizma sirtining yuzi va hajmi.

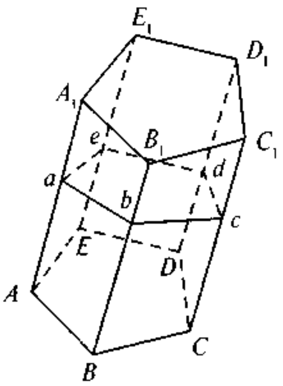
1. Asosiy tushunchalar. Bizga parallel tekisliklarda joylashgan ikkita o'zaro teng *ABCDEF* va $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ko'pburchak berilgan bo'lib, ularning mos tomonlari o'zaro parallel, ya'ni $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1,\dots,$ $EA \parallel E_1A_1$, shuningdek, ularning mos uchlarini tutashtiruvchi AA_1, $BB_1,\dots,EE_1$ kesmalar bir-biriga parallel bo'lsin. Demak, AA_1B_1B, $BB_1C_1C,\dots,FF_1A_1A$ to'rtburchaklar parallelogrammlardan iborat.

Prizma — asoslar deb ataladigan ikki yog'i parallel tekisliklarda yotuvchi teng ko'pburchaklar, qolgan barcha yoqlari bitta to'g'ri chiziqqa parallel (masalan, AA_1 to'g'ri chiziqqa) parallelogrammlardan iborat ko'pyoqdir (19.14-chizma). Bunda o'zaro teng *ABCDEF* va $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ko'pburchaklar —prizmaning *asoslari,* $AA_1B_1B,\dots,FF_1A_1A$ parallelogrammlar — prizmaning *yon yoqlari* deyiladi.Prizmaning yon yoqlari kesishadigan AA_1, $BB_1,\dots,FF_1$ kesmalar — prizmaning *yon qirralari,*yon yoqlar asoslar bilan kesishadigan AB, $A_1B_1,\dots,FA$, F_1A_1

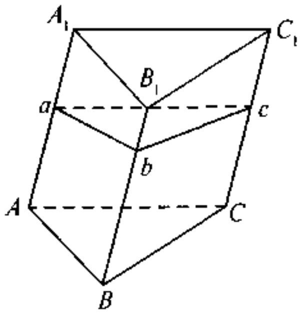


19.14- chizma.

kesmalar prizma *asoslarining qirralari* deyiladi. Prizma asoslarining uchlari prizma *uchlari* deyiladi, ular A, A_1, B, B_1,...,E, E_1, F, F_1 nuqtalardir. Agar prizmaning yon qirralari prizma pastki asosining tekisligi bilan to'g'ri burchakdan farq qiladigan burchak tashkil qilsa, u *og'ma prizma* (19.14- *a* chizma) deyiladi. Agar yon qirralar asos tekisligiga perpendilcular bo'lsa, prizma *to 'g'riprizma* deyiladi. To'g'ri prizmaning yon yoqlari ham asos tekisligi bilan 90° burchak tashkil qiladi (19.14- *b* chizma).
Agar prizma yuqori asosining ixtiyoriy nuqtasidan pastki asosi tekisligiga perpendikular tushirilsa, bu perpendikular (19.14- *a* chizmadaA_1Kkesma) prizmaning *balandligi* deyiladi. Ravshanki, prizmadagi A_1K balandlikning uzunligi prizmaning asoslari orasidagi masofaga tengdir. Prizma pastki va yuqori asoslarining bitta yoqqa tutashmagan uchlarini tutashtiruvchi kesma lining *diagonali* deyiladi. 19.14- *a* chizmada AC_1, AD_1, BD_1, BE_1 va h.k. kesmalar prizmaning diagonallaridir. Prizmaning bitta yon tomonga tutashmagan ikkita yon qirrasi, masalan,AA_1 va CC_1 lar orqali tekislik o'tkazamiz.
Bu tekislik prizmaning asoslarini ularning mos AC va A_1C_1 diagonallari bo'yicha kesib o'tadi. Kesimda, prizmaning *diagonal kesimi* deb ataladigan, AA_1CC_1 parallelogramm hosil bo'ladi. Boshqacha aytganda, prizmaning diagonal kesimi deb, prizma asoslarining mos diagonallari orqali o'tkazilgan kesimga aytiladi. Prizma diagonal kesimlarining soni, prizmaning bitta asosida o'tkazilishi mumkin bo'lgan diagonallar soniga teng. Modomiki, qavariq *n* burchakda $\frac{1}{2}n(n-3)$ ta diagonal o'tkazish mumkin ekan, *n* burchakli prizma diagonal kesimlarining soni $\frac{n(n-3)}{2}$ ta bo'ladi. Har bir diagonal kesimda ikkita diagonal o'tkazish mumkin bo'lganligidan, *n* burchakli prizmada *n(n* - 3) ta diagonal o'tkazish mumkin. Ravshanki, faqat uchburchakli prizmada diagonallar ham, diagonal kesimlar ham o'tkazish mumkin emas.
Agar prizmaning asosida muntazam ko'pburchak yotsa va uning yon qirralari asos tekisligiga perpendikular bo'lsa, u *muntazam prizma* deyiladi. Kub —- to'rtburchakli muntazam prizmadir.
2. Prizmaning perpendikular kesimi. Bizga$ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ og'ma prizma berilgan bo'lsin (19.15- chizma). PrizmaningAA_1 qirrasida ixtiyoriy *a* nuqtani olib, u orqali AA_χ qirraga perpendikular tekislik o'tkazamiz. To'g'ri chiziq va tekislikning perpendikularligi alomatiga ko'ra, o'tkazilgan tekislikning ABB_1A_1 va AA_1E_1E yon qirralar bilan kesishish chiziqlari *ab* va *ae* lar AA_1 qirraga perpendikular bo'ladi. Prizmaning yon qirralari bir-biriga parallel bo'lganligidan, barcha yon qirralar kesim tekisligiga perpendikulardir. Kesimda hosil bo'lgan *abode* ko'pburchak — prizmaning perpendikular kesimi deyiladi. Ravshanki, perpendikular kesimning tomonlari asosning mos tomonlariga parallel bo'lmaydi.
Agar prizmaning yon qirralari asos tekisligiga perpendikular bo'lsa, prizmaning perpendikular kesimi prizmaning asosi bilan ustma-ust tushadi.



19.15- chizma.



19.16- chizma.

Prizmaning sirti. Bizga ixtiyoriy prizma berilgan bo'lsin. Prizma *yon sirtining yuzi* deb, uning yon yoqlari yuzlarining yig'indisiga aytiladi. Prizmaning *to 'la sirti* deb, uning barcha yon yoqlari yuzlari va ikkita asosi yuzlari yig'indisiga aytiladi. Shunday qilib (19.15-chizma),

$$S_{\text{yon}} = S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} + \ldots + S_{EE_1A_1A},$$

$$S_{\text{to'la}} = S_{\text{yon}} + 2S_{\text{asos}}.$$

1-teorema. ***Prizma yon sirtining yuzi prizma perpendikular kesimi perimetrining uning yon qirrasiga ko'paytmasiga teng.***

I s b o t i. Prizma AA_1 qirrasining *a* nuqtasidan AA_1 qirraga perpendikular tekislik o'tkazamiz (19.17- chizma) va kesiriada *abode* perpendikular kesimni hosil qilamiz. Prizmaning yon yoqlari parallelogrammlardan iborat bo'lib, perpendikular kesimning tomonlari bu parallelogrammlarning balandliklaridir. Shunday qilib,

$$S_{AA_1B_1B} = AA_1 \cdot ab, \quad S_{BB_1C_1C} = BB_1 \cdot bc \text{ va h.k.}$$

Shu sababli,

$$S_{\text{yon}} = AA_1 \cdot ab + BB_1 \cdot bc + \ldots + EE_1 \cdot ea.$$

Modomiki, $AA_1 = BB_1 = \ldots = EE_1$ ekan, $S_{\text{yon}} = AA_1 \cdot (ab + bc + \ldots + ea)$

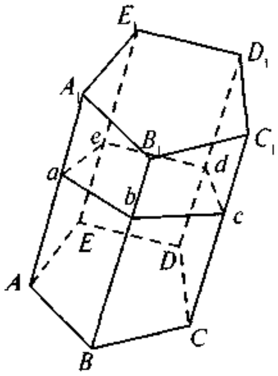
Oxirgi olingan tengikda qavs ichidagi ifoda prizma perpendikular kesimining perimetriga teng, shuning uchun,

$$S_{\text{yon}} = P_{\text{perp kes}} \cdot AA_1$$

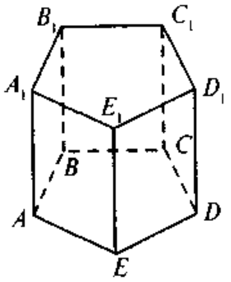
N a t i j a. *To'g'ri prizmaning yon sirti prizma asosining perimetri bilan uning yon qirrasi uzunligi ko 'paytmasiga teng:*

$$S_{\text{yon}} = P_{\text{asos}} \cdot l$$

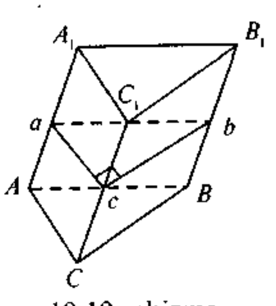
bunda l — yon qirra uzunligi



19.17- chizma.



19.18- chizma.



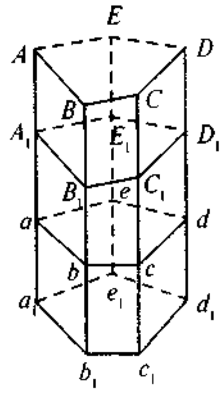
19.19- chizma.

Haqiqatan, to'g'ri prizma bo'lgan holda (19.18- chizma) uning yon qirralari asos tekisligiga perpendikular bo'ladi va shu sababli, prizmaning perpendikular kesimi prizmaning asosidan iborat bo'ladi.

Prizmaning hajmi. Prizmaning hajmini hisoblash formulasini keltirib chiqarishdan awal prizmalarning quyidagi xossasini ko'rib chiqamiz.

Lemma. ***Og'ma prizma shunday to'g'ri prizmaga tengdoshki, to'g'ri prizmaning asosi og'ma prizmaning perpendikular kesimidan iborat bo'lib, balandligi esa og'ma prizmaning yon qirrasiga tengdir.***

I s b o t i. $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ — berilgan og'ma prizma bo'lsin (19.20- chizma). Bu prizmaning qirralari va yoqlarini bitta yo'nalishda



19.20- chizma.

davom ettiramiz. AA_1 qirraning davomida ixtiyoriy a nuqtani olamiz va u orqali AA_{λ} qirraga peφendikular tekislik o'tkazamiz. Kesimda *abcde* ko'pburchak hosil bo'ladi va u berilgan og'ma prizmaning perpendikular kesimidan iborat. a nuqtadan Aa qirraning davomida $aa_1 = AA_1$ kesmani ajratib, AA_1 to'g'ri chiziqqa perpendicular ikkinchi tekislik o'tkazamiz. U holda kesimda *abcde* ko'pburchakka teng $a_1b_1c_1d_1e_1$ ko'pburchak hosil bo'ladi. Har ikkala kesim ham AA_1 to'g'ri chiziqqa peφendikular bo'lganligidan, $abcde\ a_1b_1c_1d_1e_1$ ko'pyoq — lemmada aytilgan to'g'ri prizmadan iborat. Endi $a_1b_1...D_1E_1$ ko'pyoqni qaraymiz. U a_1e prizma va aE_1 ko'pyoqdan tashkil topgan (bunda ko'pyoq bitta asosining birinchi harfl va ikkinchi asosining oxirgi harfi orqali ifodalangan). Ikkinchi aE ko'pyoq esa aE_1 ko'pyoq va A_1E_1 og'ma prizmadan tashkil topgan. A_1E_1 va aE ko'pyoqlarning asoslari teng, a_1A_1 va Aa yon qirralari ham teng bo'lganligidan, a_1E_1 va aE ko'pyoqlar tengdosh bo'ladi. Lekin aE_1 ko'pyoq a_1E_1 va aE ko'pyoqlarning umumiy qismi bo'lganligidan, A_1E va a_1e ko'pyoqlar ham tengdosh bo'ladi.

Lemma isbotlandi.

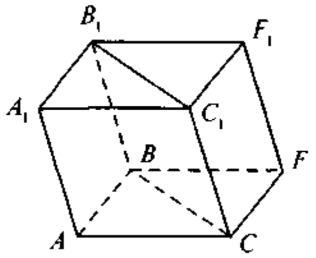
Biz parallelepipedning hajmi haqidagi teoremani ko'rib o'tgan edik. Modomiki, parallelepiped to'rtburchakli prizmadan iborat ekan, isbotlanganiga ko'ra, uning hajmi asosining yuzi S_{asos} bilan balandligi H ko'paytmasiga teng:

$$V = S_{asos} \cdot H.$$

2-1 e o r e m a. ***Uchburchakli prizmaning hajmi asosining yuzi bilan balandligi ko'paytmasiga teng.***

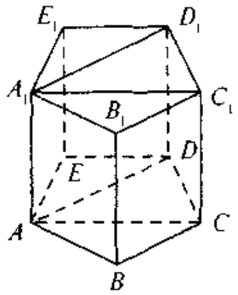
I s b o t i. Bizga AC_1 uchburchakli prizma berilgan bo'lsin (19.21- chizma). Uning BB_1 qirrasi orqali AA_1C_1C yog'iga parallel tekislik o'tkazamiz; CC_1 qirrasi orqali esa AA_1B_1B yog'iga parallel tekislik o'tkazamiz. So'ngra prizma asoslari tekisliklarini davom ettirib, hajmi $V = S_{ABFC} \cdot H$

bo'lgan $ABFCA_1B_1F_1C_1$ parallelepipedni hosil qilamiz.

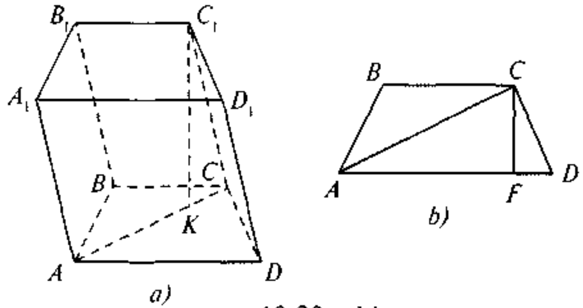


19.21- chizma.

Parallelepipedning BB_1C_1C diagonal kesimi uni ikkita tengdosh uchburchakli prizmaga bo'ladi, chunki $\Delta ABC = \Delta BFC$ va ularning asoslari
100



19.22- chizma.



19.23- chizma.

tekisliklari o'zaro paralleldir. Shuning uchun berilgan uchburchakli prizmaning hajmi

$$V = \frac{1}{2}V = \frac{1}{2}S_{ABFC} \cdot H$$

bo'ladi. Lekin $\frac{1}{2}S_{ABFC} = S_{\Delta ABC}$ bo'lganligidan,

$$V = S_{\Delta ABC} \cdot H.$$

Teorema isbotlandi.
Agar bizga ko'pburchakli (masalan, *n* burchakli) prizma berilgan bo'lsa, uning bitta (masalan, AA_1) qirrasidan diagonal kesimlar o'tkazib (19.22-chizma), prizmani uchburchakli prizmalarga bo'lamiz. Yuqorida isbotlangan teoremadan foydalanib, prizmaning hajmi uchun $V = V_1 + V_2 + ... + V_n$ formulani hosil qilamiz yoki

$$V_{prizma} = S_1H + S_2H + ... + S_n \cdot H = (S_1 + S_2 + ... + S_n)H,$$

$$V_{prizma} = S_{asos} \cdot H.$$

Demak, ixtiyoriy prizmaning hajmi asosining yuzi bilan balandligi ko'paytmasiga teng.

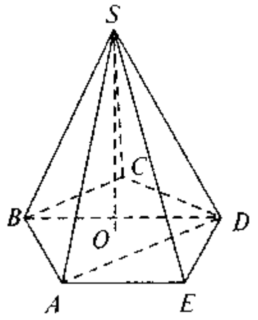
16. Piramida, uning turlari va xossalari. Piramida sirtining yuzi va hajmi.

1 - ta'rif. *Bitta yog'i ixtiyoriy qavariq ko 'pburchakdan, qolgan yoqlari esa umumiy uchga ega bo'lgan uchburchaklardan iborat ko 'pyoq* ***piramida*** *deyiladi.*
Uchburchaklarning umumiy nuqtasi *S* — piramidaning *uchi,* ko'pburchak— piramidaning *asosi,* uchburchaklar esa piramidaning *yon yoqlari* de\iladi. Piramidaning yon yoqlari o'zaro ketma-ket kesishadigan *SA, SB,..., SE* (20.1- chizma) kesmalar piramidaning *yon qirralari* deyilib, yon yoqlar asos bilan kesishadigan *AB, BC, ..., EA* kesmalar *piramida asosining tomonlari* deyiladi. Piramidaning *S* uchidan uning asosiga tushirilgan *SO—H* perpendikular piramidaning *balandligi* deyiladi. Piramida

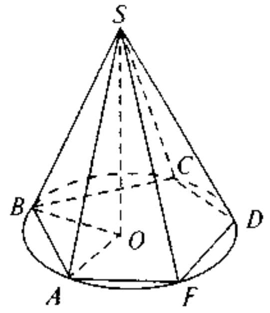
asosining diagonal! va *S* uchi orqali o'tkazilgan kesim piramidaning *diagonal kesimi* deyiladi (masalan, 20.1- chizmada $\triangle ADS$, $\triangle BDS$ va h.k).
Agar bizga *ABCDE* ko'pburchak va ko'pburchak tekisligida yotmaydigan S nuqta berilgan bo'lsa, *S* nuqtani ko'pburchakning uchlari bilan tutashtirib, *SABE* piramidani hosil qilamiz.
2 - ta'rif. *Piramida yon yoqlari yuzlarining yig'indisi uning* ***yon sirtining yuzi*** *yoki* ***yon sirti*** *deb ataladi va* S_{yon} *kabi belgilanadi.*
Agar piramidaning yon sirtiga uning asosi yuzi(S_{asos})qo'shilsa,piramidaning $S_{to'la}$ to'la sirtini olamiz:

$$S_{to'la} = S_{yon} + S_{asos}. \quad (1)$$

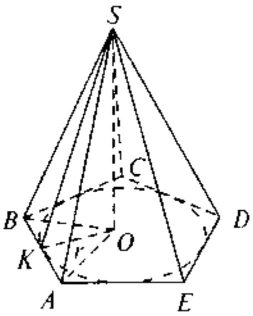
3- ta'rif. Agar: 1) *piramidaning asosi muntazam ko'pburchakdan iborat bo'lsa', 2}piramidaning balandligi shu ko 'pburchakning markazidan o 'tsa, piramida* ***muntazam piramida*** *deyiladi.*
Faraz qilaylik, *SAB...F*(20.2- chizma) — muntazam piramida va *SO* uning balandligi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra, *AB=BC=...-FA, O* nuqta — shu ko'pburchakning markazidir. Piramidaning asosida muntazam ko'pburchak yotganligi va *O* nuqta uning markazi bo'lganligidan, bu ko'pburchakka *R=OA=OB=.,.=OF* radiusli tashqi aylana chizish mumkin.
Modomiki, *SO* — piramidaning balandligidan iborat ekan, $\triangle AOS$, $\triangle BOS$, ...$\triangle FOS$ lar (20.2- chizma) ikkita katetlari (bittasi tashqi chizilgan aylananing radiusi, ikkinchisi piramidaning balandligidir) bo'yicha bir-biriga tengdir:$\triangle AOS = \triangle BOS = ... = \triangle FOS$.



20.1- chızma.



20.2- chizma.



20.3- chizma.

U vaqtda ularning uchinchi tomonlari ham bir-biriga teng bo'ladi: *AS=BS= ...=ES,* ya'ni muntazam piramidaning barcha yon qirralari o'zaro teng bo'ladi. Bundan, muntazam piramidaning yon yoqlari o'zaro teng bo'lishi kelib chiqadi.Muntazam piramida yon yog'ining balandligi piramidaning *apofemasi* deyiladi. Masalan,$\triangle ASB$ da $SK \perp AB$ apofemadan iborat(20.3- chizma).
Endi *K* nuqtani ko'pburchakning markazi *0* nuqta bilan tutashtiramiz. $SK \perp AB$ bo'lganligidan, uch perpendikular haqidagiteoremadan$OK \perp AB$ bo'ladi. Shunday qilib,piramidaning $\angle SKO$yon yog'i va asosi tashkil etgan ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi bo'ladi. Muntazam piramidada apofemalar teng va piramidaning asosi muntazam ko'pburchakdir va, demak, piramida asosidagi barcha ikki yoqli burchaklar o'zaro teng bo'ladi. U holda *OK=r* (20.3-chizma) piramida asosiga ichki chizilgan aylananing radiusidan iborat.

Piramidaning yon sirti

1- teorema. ***Muntazam piramida yon sirtining yuzi uning asosi perimetri bilan apofemasi ko'paytmasining yarmiga teng.***
I s b o t i. Agar piramida asosining tomoni *AB— a,* apofemasi *SK— I* bo'lsa, piramida bitta yon yog'ining yuzi

$$S_{\triangle ASB} = \frac{1}{2} al \quad (2)$$

bo'ladi. Hosil qilingan (2) ifodani piramida yon yoqlari soni *n* ga ko'paytirib, piramida yon sirti yuzi uchun

$$S_{yon} = \frac{1}{2} n \ a \cdot l \quad (3)$$

ifodani hosil qilamiz. Endi $n \cdot a$ ifoda asos perimetri ekanligini hisobga olsak, talab qilingan

$$S_{yon} = \frac{1}{2} p \cdot l \quad (4)$$

formulani olamiz. Teorema isbotlandi.
Muntazam bo'lmagan piramida yon sirtining yuzi uning yon yoqlari yuzlarining yig'indisi kabi hisoblanadi.

Piramidaning xossalari

2 - teorema. ***Agar piramidaning yon qirralari o'zaro teng bo'lsa, piramida asosiga tashqi aylana chizish mumkin.***

I s b o t i. Piramidaning yon qirralari teng, ya'ni

$$SA=SB=.,. = SE \qquad (5)$$

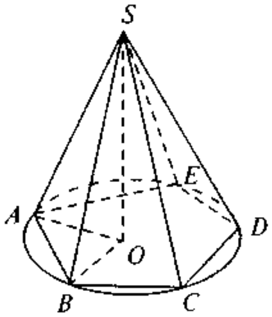
bo'lsin (20.4- chizma).

Piramidaning S uchidan uning SO balandligini o'tkazamiz va O nuqtani asosning uchlari bilan tutashtiramiz. Modomiki, (5) ga ko'ra, $SA = SB=.,.= SE$ og'malar teng ekan, ularning proyeksiya-lari ham teng, ya'ni $OA=OB = ... = OE$ bo'ladi. Demak, asosning uchlari O nuqtadan bir xil uzoqlikda yotadi va, demak, asosga $OA = R$ radiusli tashqi aylana chizish mumkin. Teorema isbotlandi.

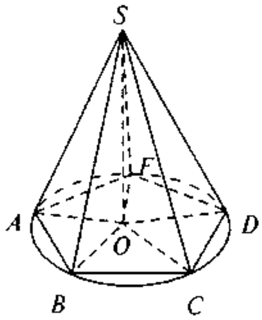
Faraz qilaylik, $SAB...F$ piramidaning yon qirralari o'zaro teng bo'lsin (20.5- chizma).

$$SA=SB = .,.SF.$$

Piramidaning SO balandligini o'tkazamiz va O nuqtani asosning uchlari bilan tutashtiramiz. Natijada hosil qilingan



20.4- chizma.



20.5- chizma.

ΔSOA , $\Delta SOB,...,$ ΔSOF to"g'ri burchakli uchburchaklar gipotenuza va bitta katet bo'yi-cha o'zaro teng bo'ladi: $\Delta SOA = \Delta SOB =$ ...... $=\Delta SOF$.

Ma'lumki, teng uchburchaklarda teng tomonlar qarshisida teng burchaklar yotadi. Shu sababli

$$\angle ASO = \angle BSO = ...=\angle FSO,$$
$$\angle SAO = \angle SBO =... =\angle SFO$$

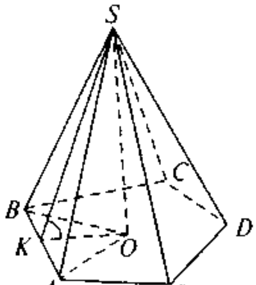
tengliklarni yozish mumkin. Natija. *Agarpiramidada:*

1) *uning yon qirralari teng bo 'Isa;*
2) *uning yon qirralari balandligi bilan teng burchaklar hosil qilsa;*
3) *uning yon qirralari asos tekisligi bilan teng burchaklar hosil qilsa, kabi shartlardan birortasi bajarilsa, piramidaning balandligi asosga tashqi chizilgan aylananing markazidan o 'tadi.*

3 - teorema. ***Agar piramidaning yon yoqlari asos tekisligi bilan o'zaro teng burchaklar hosil qilsa, piramidaning balandligi asosga ichki chizilgan aylananing markazidan o'tadi.***

I s b o t i. Faraz qilaylik, $SABCDE$ (20.6- chizma)— asosidagi ikki yoqli burchaklari o'zaro teng bo'lgan qandaydir piramida bo'lsin. Bu ikki yoqli burchaklarning chiziqli burchaklarini quramiz. S nuqtadan $SK \perp AB$ perpendikular tushiramiz. Uch perpendicular haqidagi teoremaga ko'ra, $OK \perp AB$ bo'ladi va $\angle SKO$—piramidaning asos tekisligi va ΔSAB yon yog'i hosil qilgan ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi bo'ladi. Natijada ΔSKO to'g'ri burchakli uchburchak hosil qilindi.

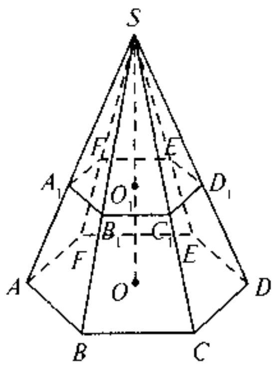
So'ngra piramida asosidagi qolgan ikki yoqli burchaklarning chiziqli burchaklarini qurib, SO kateti va o'tkir burchagi bo'yicha o'zaro teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchaklarni hosil qilamiz. Bu yerdan, ikkinchi katetlarning ham o'zaro tengligi kelib chiqadi. Demak, K nuqtalar O nuqtadan bir xil uzoqlikda joylashadi va ular piramida asosiga ichki chizilgan $OK = r$ radiusli aylanaga tegishli bo'ladi.



20.6- chizma.

Piramidaning asosiga parallel tekisliklar bilan hosil qilingan kesimlari haqidagi teoremalar.
teorema (piramida asosiga parallel kesimlar haqida):
Agar piramidada uning asosiga parallel kesim o'tkazilgan bo'Isa:
1) ***kesim piramidaning asosi va yon qirralarini proporsional qismlarga bo'ladi;***
2) ***kesimda asosga o'xshash ko'pburchak hosil bo'ladi;***
3) ***asos va kesim yuzlarining nisbati piramida uchidan ulargacha bo'lgan masofalar kvadratlari nisbatlari kabidir.***
I s b o t i. 1) Teoremaning shartiga ko'ra, o'zaro parallel $A_1B_1...F_1$ va $AB...F$ (20.7- chizma) tekisliklar piramidaning yon yoqlari bilan kesishadi va mos kesishish chiziqlari o'zaro paralleldir.

$$A_1B_1 \parallel AB,\ B_1C_1 \parallel BC, ..., F_1A_1 \parallel FA.$$



20.7- chizma

Bundan tashqari, piramidaning S uchidagi tekis burchak-larning tomonlari parallel to'g'ri chiziqlar bilan kesilgan. Fales teoremasiga binoan, $\angle ASB, \angle BSC, ..., \angle FSA$ burchaklar uchun, mos ravishda,

$$\frac{AA_1}{A_1S} = \frac{BB_1}{B_1S}, \frac{BB_1}{B_1S} = \frac{CC_1}{C_1S}, \quad , \frac{FF_1}{F_1S}, \frac{AA_1}{A_1S}, \frac{AA_1}{A_1S} = \frac{OO_1}{O_1S}$$

munosabatlarni olamiz. Bulardan talab qilingan

$$\frac{AA_1}{A_1S} = \frac{BB_1}{B_1S}, ..., \frac{AA_1}{A_1S} = \frac{OO_1}{O_1S}$$

munosabatlar kelib chiqadi.
2) $\Delta A_1B_1S_1 \sim ABS$ yoqdagi A_1B_1 va AB kesmalarning o'zaro parallelligidan $(A_1B_1 \parallel AB)$, $\Delta A_1B_1S_1 \sim \Delta ABS$) va, demak,

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1S}{BS}.$$

Endi BSC yoqdagi B_1C_1 va BC kesmalarning ham o'zaro parallelligidan $(B_1C_1 \parallel BC)$, $\Delta B_1C_1S \sim \Delta BCS$ va, demak,

$$\frac{B_1S}{BS} = \frac{B_1C_1}{BC}.$$

Olingan ikkita proporsiyani taqqoslab,

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}$$

munosabatni olamiz. Yuqoridagiga o'xshash tahlil o'tkazib,

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{B_1S}{BS}, \frac{B_1S}{BS} = \frac{C_1D_1}{CD} \quad \text{va} \quad \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD}$$

bo'lishini ko'rsatish mumkin. Bu jarayonni davom ettirib, piramidaning kesimi va asosi tomonlari o'zaro proporsionalligini olamiz:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \quad = \frac{F_1A_1}{FA}$$

Kesim va asosning tomonJari parallelligidan, $A_1B_1...E_1$ va $AB...E$ ko'pburchaklarning mos burchaklari o'zaro teng bo'ladi:

$$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1,\ \angle BCD = \angle B_1C_1D_1, ..., \angle FAB = F_1A_1B_1.$$

Ko'pburchaklarnmg o'xshashligi ta'rifidan $A_1B_1...F_1 \sim AB...F$ bo'ladi.

3) Ma'lumki, o'xshash ko'pburchaklar yuzlarining nisbati ularning mos tomonlari kvadratlari nisbati kabidir. Shuning uchun

$$\frac{S_{kes}}{S_{asos}} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2} \quad (6)$$

Faraz qilaylik, O va O_1 lar piramida OS balandligining mos ravishda, asos va kesim bilan kesishish nuqtalari bo'lsin. Ikkita o'xshash uchburchaklar juftlarini, $\Delta A_1SO_1 \sim \Delta ASO$ va $\Delta A_1SB_1 \sim \Delta ASB$ larni qaraymiz. Uchburchaklarning o'xshashligidan,

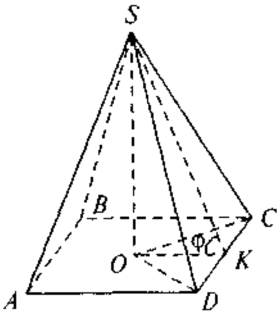
$$\frac{O_1S}{OS} = \frac{A_1S}{AS} \text{ va } \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1S}{AS}$$

kelib chiqadi, bundan $\frac{O_1S}{OS} = \frac{A_1B_1}{AB}$ bo'ladi. U vaqtda piramidaning kesimi va asosi uchun

$$\frac{S_{kes}}{S_{asos}} = \left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2 = \left(\frac{O_1S}{OS}\right)^2 \quad (7)$$

ya'ni talab qilingan ifodani olamiz. Teorema isbotlandi.
Faraz qilaylik, ixtiyoriy piramidaning yon yoqlari asos tekisligi bilan o'zaro teng φ burchak hosil qilsin. Piramida asosidagi ikki yoqli burchakning chiziqli burchagini yasash uchun piramidaning S uchidan $SK \perp CD$ kesma va piramidaning SO balandligini o'tkazamiz (20.8- chizma). Uch perpendikular haqi-dagi teoremaga ko'ra, $OK \perp CD$ va ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi $\angle SKO = \varphi$ bo'ladi. Piramida yon yoqlaπning asos tekisligiga proyeksiyalarini yasaymiz. SCD yon yoqning proyeksiyasi ΔCOD dan iborat

$$S_{asos} = S_{yon} \cdot \cos\phi$$



20 8- chızma.

bo'ladi. Qolgan proyeksiyalarni ham shunga o'xshash yasaymiz. Yon yoqlarning proyeksiyalari piramidaning asosini ustma-ust tushmasdan va egilmasdan to'ldiradi. Shu sababli, shakl ortogonal proyeksiyasining yuzi haqidagi teoremani qo'llash mumkin:

$$S_{asos} = S_{yon} \cdot \cos\varphi. \quad (8)$$

Shunday qilib, agar piramidaning asosi va asosdagi ikki yoqli burchagi ma'lum bo'lsa, uning yon sirtining yuzi

$$S_{yon} = \frac{S_{asos}}{\cos\varphi} \quad (9)$$

formula bo'yicha hisoblanar ekan.

Piramidaning hajmi

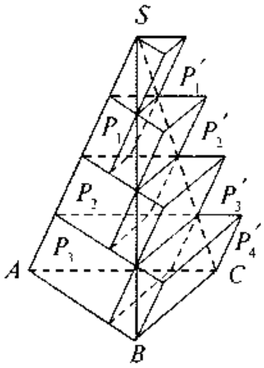
5- teorema. ***Piramidaning hajmi asosining yuzi bilan balandligi ko'·paytmasining uchdan biriga teng:***

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h, \quad (10)$$

bunda S — piramida asosining yuzi, h — balandligi
I s b o t i. Asosining yuzi S, balandligi $SO = h$ bo'lgan biror $SABC$ uchburchakli piramidani qaraymiz. Piramidaning SO balandligini n ta teng bo'lakka bo'lamiz va bo'linish nuqtalaridan piramida asosiga parallel tekisliklar o'tkazamiz. Bu tekisliklar piramidani n ta bo'lakka bo'ladi. Hosil bo'lgan bo'laklarning bar biriga ichki va tashqi prizmalarni (20.9- chizmada ko'rsatilganidek) yasaymiz. Ichki

chizilgan ko'pyoq $n — \backslash$ ta prizmadan, tashqi chizilgan ko'pyoq esa n ta prizmadan iborat bo'ladi. Prizma quyi asosining yuzi S ga, balandligi esa $\frac{h}{n}$ ga teng. Agar tashqi ko'pyoqning hajmi V_1 bo'lsa, ichki ko'pyoqning hajmi $V_1 - \frac{Sh}{n}$ ga teng bo'ladi. U holda piramidaning hajmi V uchun

$V_1 - \frac{Sh}{n} < V < V_1$ (H) tengsizlikni yozish mumkin.



20.9- chizma.

Endi V_1 ni S va h orqali ifodalashga o'tamiz. Faraz qilaylik, piramida parallel kesimlarining yuzlariS_1, S_2,...,S_{n-1} bo'lsin.Piramidadagi parallel kesimlarning xossasidan foydalanib (4-teoremaga q.) quyidagi

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{h}{n}\right)^2 : h^2; \quad \frac{S_2}{S} = \left(\frac{2h}{n}\right)^2 : h^2;...;\frac{S_{n-1}}{S} = \left(\frac{(n-1)h}{n}\right)^2 : h^2$$

tengliklarni yozamiz. Bundan

$$S_1 = \frac{1}{n^2}S; \quad S_2 = \frac{2^2}{n^2}S;...;S_{n-1} = \frac{(n-1)^2}{n^2}S$$

va

$$V_1 = \frac{h}{n}(S_1 + S_2 + ... + S_{n-1})S = \frac{Sh}{n^3}(1^2 + 2^2 + ... + n^2) =$$

$$= \frac{Sh}{n^3}\cdot\frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1)$$

munosabatlarni olamiz. Natijada piramidaning hajmi uchun yozilgan (11) tengsizlik

$$\frac{Sh}{6n^2}(2n^2 + 3n + 1) - \frac{Sh}{n} < V < \frac{Sh}{6n^2}(2n^2 + 3n + 1),$$

$$\frac{Sh}{2n} + \frac{Sh}{6n^2} - \frac{Sh}{n} < V - \frac{Sh}{3} < \frac{Sh}{2n} + \frac{Sh}{2n^2}$$

ko'rinishni oladi. n ning cheksiz ortishi bilan tengsizlikning chap va o'ng tomonidagi ifodalar bir-biridan juda kam farq qiladi. Shuning uchun ular orasidagi $V - \frac{Sh}{3}$ ifoda ham noldan juda kam farq qiladi. Demak, yetarli katta n lar uchun

$$V - \frac{Sh}{3} = 0$$

bo'ladi, ya'ni piramidaning hajmi uchun talab qilingan (10) formulaga ega bo'lamiz. Teorema isbotlandi.

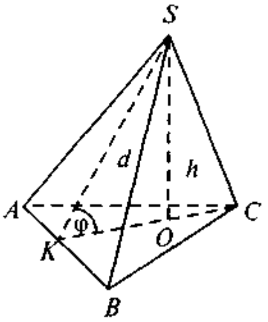
6 - teorema. ***Agar P va Q—tetraedr ikkita yog'ining yuzlari, a— bu yoqlar kesishadigan qirraning uzunligi, φ esa bu yoqlar orasidagi ikki yoqli burchak bo'lsa, tetraedrning hajmi***

$$V = \frac{2PQ\sin\varphi}{3a} \quad (12)$$

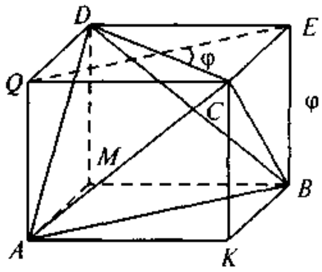
bo'ladi.

I s b o t i . $SABC$ tetraedrda$S_{ABC}= P$, $AB = a$ hamda ABC va ASB tekisliklar orasidagi burchak φ bo'lsin. ASB yon yoqning $SK = d$ balandligini o'tkazamiz (20.10- chizma). U holda $Q = \frac{1}{2}a\cdot d$ va $d = \frac{2Q}{a}$ bo'ladi. Piramidaning $SO = h$ balandligini o'tkazamiz. U holda ΔSKO to'g'ri burchakli va $\Delta SKO = \varphi$ bo'ladi. Bu uchburchakdan piramidaning balandligini topamiz:

$$h = d \sin \varphi = \frac{2Q \sin \varphi}{a}. \quad (13)$$



20.10- chizma.



20.11- chizma.

Piramida asosi ABC ning yuzi *P* bo'lganligidan, uning hajmi uchun talab qilingan (12) formulani hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

7-teorema. ***Agar tetraedr ikkita qarama-qarshi qirrasi-ning uzuntiklari a va b ga, ular orasidagi masofa d ga hamda berilgan qirralar orasidagi burchakφga teng bo'lsa, tetraedrning hajmi***

$$V = \frac{1}{6} a \cdot b \cdot d \cdot \sin\varphi \quad (14)$$

bo'ladi.

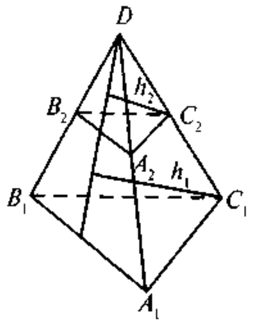
I s b o t i. Faraz qilaylik, berilgan *ABCD* tetraedrda *AB = a, CD = b* tomonlar ma'lum bo'lsin. Berilgan tetraedrni *AKBMQCED* parallelepipedgachato'ldiramiz.Buning uchun tetraedrning bar bir qirrasidan qarama-qarshi qirraga parallel tekislik o'tkazamiz. Masalan, *AD* qirradan *BC* qirraga parallel *AQDM* tekislik o'tkazamiz. *AB* va *CD* ayqash chiziqlar orasidagi φ burchakni ko'rsatish uchun *AB* to'g'ri chiziqni o'ziga parallel ravishda *CD* to'g'ri chiziq bilan kesishguncha harakatlantiramiz (ko'chirib boramiz) (20.11- chizmaga q.)· Tetraedrning *AKBM* va *QCED* yon yoqlarining yuzlari $\frac{1}{2} ab \sin \varphi$ ga tengdir. Bu parallel tekisliklar orasidagi masofa *d ga* teng bo'lganligidan, parallelepipedning hajmi

$$V_{par} = \frac{1}{2} abd \sin \varphi \quad (15)$$

bo'ladi. Agar parallelepipeddan *to'rttaABCK, DEBC, AQDC, ABMD* piramidalarni ajratib olsak, *ABCD* tetraedrni hosil qilamiz. Ikkin-chi tomondan, piramidaning hajmi parallelepiped hajmining oltidan bir qismini tashkil qiladi. Shuning uchun, tetraedrning hajmi

$$V = V_{par} - 4\frac{1}{6} V_{pir} = \frac{1}{3} V_{par} \quad (16)$$

bo'ladi, bundan talab qilingan (14) formulani hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.



20.12- chizma.

8- teorema. ***Fazoda D nuqtadan o'tuvchi uchta to'g'ri chiziq berilgan bo'lib, ularning bittasida A_1 va A_2; ikkinchisida B_1 va B_2; uchinchisida C_1 va C_2 nuqtalar olingan bo'lsin. Agar $DA_1B_1C_1$ tetraedrning hajmi V_1, $DA_2B_2C_2$ tetraedrning hajmi V_2 bo'lsa,***

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{DA_1}{DA_2}\cdot\frac{DB_1}{DB_2}\cdot\frac{DC_1}{DC_2} \quad (17)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

I s b o t i. C_1 va C_2 nuqtalardan, mos ravishda, DA_1B_1 va DA_2B_2 tekisliklarga perpendikularlar tushiramiz (20.12- chizma). Hosil qilingan to'g'ri burchakli uchburchaklarning o'xshashligidan,

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{DC_1}{DC_2}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

$DC_1B_1A_1$ va $DC_2B_2A_2$ tetraedrlarning hajmlari, mos ravishda, $V_1=\frac{1}{3}h_1\cdot S_{\Delta A_1B_1D}$ va $V_2=\frac{1}{3}h_2\cdot S_{\Delta A_2B_2D}$ bo'ladi. Agar $\angle A_1DB_1=\angle A_2DB_2=a$ deb belgilasak,

$$S_{\Delta A_1B_1D}=\frac{1}{2}A_1D\cdot B_1D\sin a;\quad S_{\Delta A_1B_1D}=\frac{1}{2}A_2D\cdot B_2D\sin a$$

va natijada

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{S_{\Delta A_1B_1D}}{S_{\Delta A_2B_2D}}\cdot\frac{h_1}{h_2}=\frac{DA_1}{DA_2}\cdot\frac{DB_1}{DB_2}\cdot\frac{DC_1}{DC_2}$$

talab qilingan (17) munosabatga kelamiz. Teorema isbotlandi.

Kesik piramida

Berilgan $SA_1A_2...A_n$ piramidada uning asosiga parallel β tekislik o'tkazamiz. Piramida yon qirralarining β tekislik bilan kesishish nuqtalarini $B_1, B_2,...B_n$ deb belgilaymiz. Natijada $B_1, B_2,... B_n$ kesim berilgan piramidani ikkita qismga — $SB_1B_2...B_n$ piramidaga va $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ ko'pyoqqa ajratadi. $A_1A_2...A_n$ ko'pyoqning ikkita yog'i parallel tekisliklarda yotadi, qolgan yoqlari trapetsiyalardan iborat bo'ladi. Bunday ko'pyoq *kesikpiramida* deb ataladi (20.13-chizma). Parallel tekisliklarda yotuvchi yoqlar uning *asoslari,* trapetsiyalar esa kesik piramidaning *yon yoqlari* deyiladi. Yon yoqlar kesishadigan k-єsmalar kesik piramidaning *yon qirralari* dєyiladi. Yon yoqlar va asoslar kesishadigan kesmalar kesik piramida *asoslarining qirralari (tomonlari)* deb, yuqori asosning ixtiyoriy nuqtasidan pastki asos tekisligiga o'tkazilgan OO_1 perpendicular kesik piramidaning *balandligi* deb ataladi. Asoslarning uchlari esa uning *uchlari* deyiladi. Kesik piramida asoslarining mos diagonallari orqali o'tkazilgan kesim *diagonal kesim* deb ataladi.

Agar kesik piramidada:

1) asoslar muntazam ko'pburchaklardan iborat;
2) asoslarning markazlarini birlashtiruvchi OO_1 kesma balandlikdan iborat bo'lsa, u *muntazam kesik piramida* deb ataladi.

Kesik piramida yon yoqlari yuzlarining yig'indisi uning *yon sirtining yuzi* deyiladi.

Agar kesik piramida yon sirtining yuziga uning yuqori va pastki asoslari yuzlarini qo'shsak, kesik piramida *to'la sirtining yuzi* hosil bo'ladi:

$$S_{to'la}=S_{yon}+S_{yu\ asos}+S_{p\ asos}. \quad (18)$$

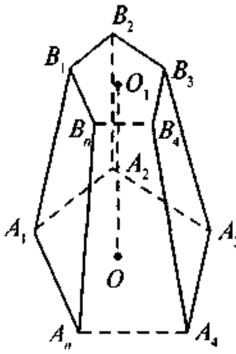
Bundan buyon S_{yon} kesik piramidaning yon sirtini, $S_{to'la}$ esa uning to'la sirtini bildiradi.

Muntazam kesik piramida yon yog'ining balandligi uning *apofemasi* deyiladi.

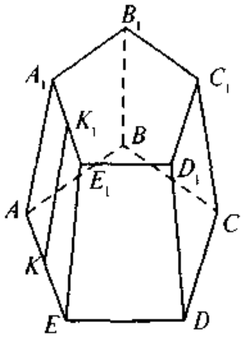
9- teorema. ***Muntazam kesik piramida yon sirtining yuzi uning asoslari perimetrlari yig'indisining yarmi bilan apofemasi ko'paytmasiga teng:***

$$S=\frac{p_1+p_2}{2}\cdot l, \quad \text{U9)}$$

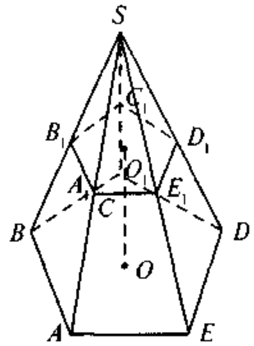
bunda p_1 va p_2 — asoslar perimetrlari, l— piramidaning apofemasi



20.13- chizma.



20.14- chizma.



20.15- chizma.

I s b o t i. Muntazam kesik piramidaning bar bir yon yog'i teng yonli trapetsiyadan iborat. Agar $l = KK_1$ apofema, $a = AE$ va $b = A_1E_1$ lar piramidaning, mos ravishda, pastki va yuqori asoslari tomonlari bo'lsa (20.14-chizma), AEE_1A_1 yon yoqning yuzi, trapetsiyaning yuzi sifatida,

$$S_1 = \frac{a+b}{2} l \quad (20)$$

bo'ladi. Bu (20) ifodani piramida yon yoqlari soni n ga ko'paytirib, piramidaning yon sirti yuzi uchun

$$S_{yon} = n \cdot S_1 = \frac{n \cdot a + n \cdot b}{2} \cdot l$$

formulani olamiz. Lekin $n \cdot a$ pastki asosning perimetri p_1 ga, $n \cdot b$ esa yuqori asosning perimetri p_2 ga teng, ya'ni $n \cdot a = p_1$, $n \cdot b = p_2$ bo'lganligidan,

$$S_{yon} = \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot l,$$

ya'ni talab qilingan (19) formulani hosil qilamiz.

10- teorema. ***Agar S_1 va S_2 — kesik piramidaning, mos ravishda, pastki va yuqori asoslari yuzlari, h — uning balandligi bo'lsa, kesik piramidaning hajmi***

$$V = \frac{1}{3} h\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right) \quad (21)$$

bo'ladi.

I s b o t i. Teoremaning shartiga ko'ra, $S_1 = S_{ABCDE}$, $S_2 = S_{A_1B_1C_1D_1E_1}$ va $h = OO_1$. Kesik piramidani uchi S nuqtada bo'lgan to'la piramidagacha to'ldiramiz (20.15- chizma). To'la piramidaning SO balandligini x orqali belgilaymiz: $SO = x$. Kesik piramidaning hajmini ikkita. $SAB...E$ va $SA_1B_1...E_1$ piramidalar V_1 va V_2 hajmlarining ayirmasi kabi topamiz:

$V = V_1 - V_2$. (22) Piramidalarning hajmlari, mos ravishda (5- teoremaga q.),

$$V_1 = V_{SAB\ E} = \frac{1}{3} S_1 x; \quad V_2 = V_{SB_1B_1\ E_1} = \frac{1}{3} S_2 (x - h)$$

bo'ladi. Piramidada parallel kesimlarning xossasidan (4- teoremaga q.),

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{x}{x-h}\right)^2$$

munosabatni yozamiz, bundan

$$\frac{x}{x-h} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} \text{ yoki } x = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}.$$

Endi kesik piramidaning hajmini topamiz:

$$V=\frac{1}{3}\left(S_1\cdot\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}-S_2\left(\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}-h\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{hS_1\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}-\frac{hS_2\sqrt{S_1}-hS_2\sqrt{S_1}+hS_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}\right)=\frac{1}{3}\cdot h\cdot\frac{\left(\sqrt{S_1}\right)^3-\left(\sqrt{S_2}\right)^3}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}=$$

$$=\frac{i}{3}\cdot h\cdot\frac{\left(\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}\right)\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)^3}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}=\frac{1}{3}\cdot h\cdot\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right),$$

ya'ni (21) ifodani hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

15. Piramidaning asosiga parallel tekisliklar bilan hosil qilingan kesimlari haqidagi teoremalar. Muntazam piramida.

16. Geometrik jism hajmi, sirtining yuzi va og'irlik markazi. Parallelepipedlar, prizmalar va piramidalar.

17. Muntazam ko'pyoqliklar. Ko'pyoqliklar proyeksiyalari va yoyilmasi. Sodda ko'pyoqliklarning kombinatsiyalari.

19. Aylanma jismlar. Silindrlar va konuslar. *Simpson formulasi. Tor. Sfera va shar. Ularning qismlari. *Gyulden teoremalari.

Silindrik sirtlar

1. To'g'ri doiraviy silindr. Bizga l chiziq va *m* to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin.

1 - t a ' r i f. *Berilgan m to 'g 'ri chiziqqa parallel va I chiziqni kesib o 'tuvchi a to 'g'ri chiziqning harakati natijasida hosil bo 'Igan sirt* ***silindrik sirt*** *deyiladi* (21.1- chizma).

Bunda *m* to'g'ri chiziq — silindrik sirtning *yasovchisi, I* chiziq esa uning *yo 'naltiruvchisi* deyiladi. Yo'naltiruvchiga bog'liq ravishda silindrik sirtlar: a) ellip-tik, b) parabolik, d) giperbolik tipdabo'lishi mumkin (21.2-chizma).

2- ta'rif. ***Doiraviy silindr*** *deb, parallel tekisliklarda yotuvchi ikkita teng doira va yasovchilari berilgan tekisliklarga perpendikular bo 'Igan silindrik sirt bilan chegaralangan geometrikjismga aytiladi.*

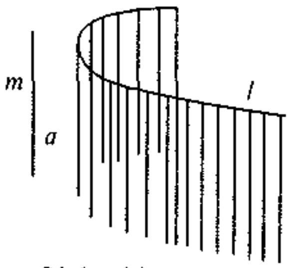
Bunda parallel tekisliklarda yotgan doiralar silindrning *asoslari,* silindrik sirt esa uning *yon sirti* deyiladi. Silindr asoslarining markazlarini tutashtiruvchi OO_1 kesma (21.3- chizma) silindrning *o'qi* deyiladi. To'g'ri doiraviy silindrlar qaralganda, OO_1 o'qning uzunligi silindrning balandligiga teng bo'ladi: $OO_1=H$ Silindr asosining radiusini *R* bilan belgilaymiz, ya'ni *OA=R* .

SilindrningOO_1 o'qi orqali o'tkazilgan tekislik uning *o 'q kesimi* deyiladi. Silindrik sirtniAA_1yasovchi bo'yicha qirqamiz va tekislikka yoyamiz (21.4- chizma). Natijada, silindrning$AA_1C_1C$to'g'ri to'rt-burchak va ikkita doira — silindrning asoslaridan tashkil topgan yoyilmasini hosil qilamiz.

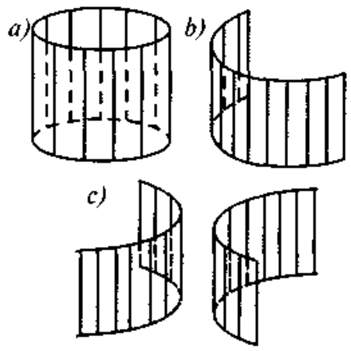
2. Silindrning yon sirti va to'la sirti. Silindr yon sirtining yuzi sifatida uning yon sirti yoyilmasi yuzi qabul qilinadi, u to'g'ri to'rtburchakdan iborat bo'lganligidan (21.4- chizma),$S_{yon}=AC\cdot AA_1$ (1) bo'ladi. /ICkesmaning uzunligi silindrning asosida yotgan aylana uzunligiga teng. Agar silindr asosining radiusi *R,* silindrning balandligi *H* bo'lsa, silindr yon sirtining yuzi $S_{yon}=2\pi R\cdot H.$ (2)
Silindr to'la sirtining yuzi uning yon sirti va ikkita asosi yuzlarining yig'indisiga teng, ya'ni

$S_{to'la} = S_{yon} + 2S_{asos}$. (3) Doiraning yuzi $S_{asos} = \pi R^2$ (4) bo'lganligidan, (3) formula $S_{to'la} = 2\pi RH + 2\pi R^2$ yoki $S_{to'la} = 2\pi R(H + R)$ (5) ko'rinishga keladi.

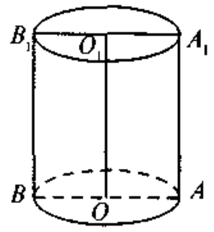
To'g'ri doiraviy silindrni to'g'ri to'rtburchakning tomonlaridan biri atrofida aylantirilishidan hosil bo'lgan jism deb ham qarash mumkin.



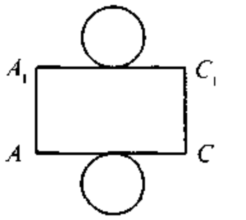
21.1- chizma.



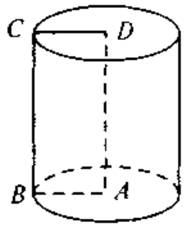
21.2- chizma.



21.3- chizma.



21.4- chizma.



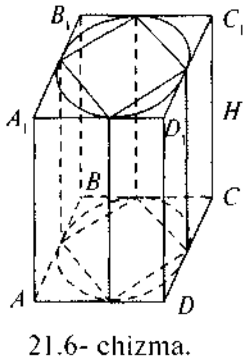
21.5- chizma.

ABCD to'g'ri to'rtburchakni (21.5- chizma) *ADtomon* atrofida aylantirib, radiusi to'g'ri to'rtburchakning *AB* tomoniga teng bo'lgan silindr hosil qilamiz. Bunda to'g'ri to'rtburchakning *AD* tomoni silindrning o'qidan iborat bo'ladi.

Silindrning hajmi.

1- teorema. ***Silindrning hajmi asosining yuzi bilan balandligi ko'"paytmasiga teng.***

I s b o t i. Asosining yuzi *S,* balandligi *H* bo'lgan silindr berilgan bo'lsin (21.6-chizma). Silindrga ichki va tashqi *n* burchakli muntazam prizmalar chizamiz. Prizmalar asoslarining yuzlarini, mos



21.6- chizma.

ravishda, S_n va S'_n orqali belgilasak, bu prizmalarning hajmlari, $S_n \cdot H$ va $S'_n \cdot H$ ko'rinishda yoziladi. Ichki chizilgan prizma silindrning ichida, tashqi chizilgan prizma esa uning tashqarisida yotganligidan, silindrning *V* hajmi uchun $S_n \cdot H < V < S'_n \cdot H$ tengsizlikni yozish mumkin.

Agar *n* cheksiz orttirilsa, S_n va S'_n yuzlar silindr asosining S_{asos} yuzidan yetarlicha kichik farq qiladi. Demak, hosil qilingan qo'sh tengsizlikdagi uchta ifodaning barchasi $S_{asos} \cdot H$ dan yetarlicha kichik farq qiladi. Bu esa faqat $V = S_{asos} \cdot H$ (6) bo'lgandagina mumkin. Teorema isbotlandi.

1 - n a t i j a . *Silindr asosining radiusi R bo 'lsa,* $S_{asos} = \pi R^2$ *bo 'ladi. Demak, silindrning hajmi* $V = \pi R^2 \cdot H$ (7) *formula bo'yicha hisoblanadi.*

Takrorlash uchun savol va topshiriqlar

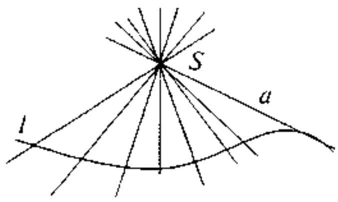
1. Silindrik sirt deb nimaga aytiladi?
2. Silindrik sirtning yo'naltiruvchisi deb nimaga aytiladi?
3. Silindrik sirtning yasovchisi deb nimaga aytiladi?
4. Siz qanday silindrik sirtlarni bilasiz?
5. To'g'ri doiraviy silindr deb nimaga aytiladi?
6. Silindrning o'qi deb nimaga aytiladi?
7. Silindrning o'q kesimi deb nimaga aytiladi?
8. Tekislik silindrni uning o'qiga parallel ravishda kesib o'tsa, kesimda qanday shakl hosil bo'ladi?

Konik sirtlar

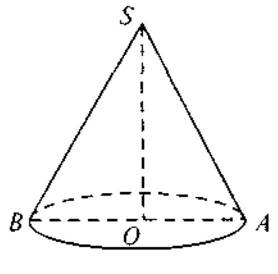
1. To'g'ri doiraviy konus. Fazoda qandaydir *S* nuqta va biror / chiziq berilgan bo'lsin. *S* nuqta orqali / chiziqni kesib o'tuvchi har xil to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz (21.7- chizma).

3- ta'rif. *Berilgan S nuqta orqali berilgan I chiziqni kesib o'tuvchi a to'g'ri chiziqning harakati natijasida hosil bo 'Igan sirt* ***konik sirt*** *deyiladi.*

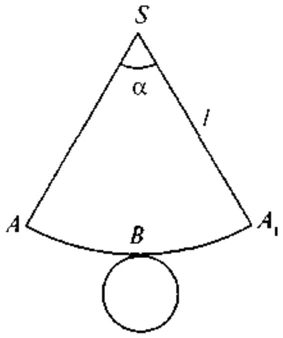
S nuqta konik sirtning *uchi, I* chiziq *uning yo'naltiruvchisi, a* to'g'ri chiziq esa uning *yasovchisi* deyiladi.



21.7- chizma.



21.8- chızma.



21.9- chizma.

4- ta'rif. **Tø'g'ri** ***doiraviy konus*** deb, S *uchdan bir tomon-da yotgan konik sirt va doira bilan chegaralangan hamda:* 1) *yo'naltiruvchisi aylanadan iborat;* 2) *S uch chegaralovchi doiraning markaz,iga proyeksiyalanadigan geometrikjismga ayliladi.*

Konυsni chegaralovchi doira uning *asosi* deyiladi. Konusning Suchidanasostekisligiga tushirilgan *SO* perpendikular konusning *balandligi,* shuningdek, uning *o'qi* ham deyiladi (21.8-chizma). Konusning o'qi orqali o'tgan kesim uning *o'q kesimi* deyiladi.

Agar konusni uning *SA* yasovchisi bo'yicha kesib, tekislikka yoysak, konusning yoyilmasi deb ataladigan shaklni hosil qilamiz (21.9-chizma). Konus yon sirtining yoyilmasi ASA_1 doiraviy sektordan iborat. Konusning yoyilmasida sektorga konus asosida yotuvchi doira qo'shib qaraladi.

2. Konusning yon sirti va to'la sirti. Konus yon sirtining yuzi sifatida uning yon sirti yoyilmasining yuzi qabul qilingan. / konusning yasovchisi, *r* unirtg asosi radiusi, ABA_1 yoyning (boshqacha aytganda, konus yoyilmasi burchagining) gradus o'lchovi α ga teng bo'lsin (21.9-chizma). U holda konus yoyilmasining radiusi l, ABA_1 yoyning uzunligi $2\pi r$ bo'ladi. Shu sababli konus yon sirtining yuzi SAA_1 sektorning yuzi kabi hisoblanadi:

$$S_{\text{yon}} = \frac{\pi l^2}{360^\circ}\alpha.$$

Endi ABA_1 yoyning uzunligi uchun olingan ifodalarni tenglashtiramiz: $2\pi r = \frac{2\pi l}{360^\circ}\alpha$.. Bundan $\alpha = \frac{360^\circ \cdot r}{l}$ Bit ifodani yon sirt yuzi ifodasiga keltirib qo'yamiz:

$$S_{yon} = \frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \frac{360\, r}{l}$$

Yoki

$$S_{yon} = \pi r l. \quad (8)$$

Shunday qilib, konus yon sirtining yuzi asos aylanasi uzunligi yarmining yasovchiga ko'paytmasiga teng.Konus to'la sirtining yuzi yon sirt va asos yuzlari yig'indisi kabi hisoblanadi:

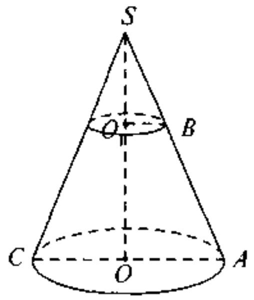
$$S_{to'la} = S_{yon} + S_{asos} = \pi r l + \pi r^2$$

yoki

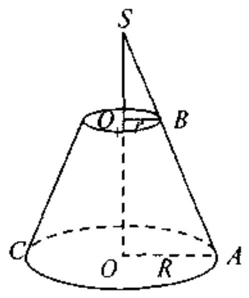
$$S_{to'la} = \pi r(l + r). \quad (9)$$

Kesik konus. Biror konusda uning o'qiga perpendikular tekislik o'tkazamiz. Kesimda tekisligi berilgan konus asosining tekisligiga parallel doira hosil qilamiz. O'tkazilgan tekislik berilgan konusdan yangi konus kesadi, konusning qolgan qismi esa *kesik konus* deyiladi.

Kesik konusni chegaralovchi doiralar uning *asoslari* deyiladi. Konus asoslarini tutashtiruvchi OO_1 kesma kesik konusning *balandligi* deyiladi (21.10- chizma). Konus sirtining kesik konusni chegaralovchi qismi uning *yon sirti* deyiladi. Konus yasovchilarining kesik konus asoslari orasida joylashgan qismlari kesik konusning *yasovchilari* deyiladi. Kesik konus yon sirtining yuzini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz. Kesik konus pastki va yuqori asoslari radiuslari, mos ravishda, *R* va *r,* uning yasovchisi *l=AB* bo'lsin (21.11- chizma). U holda kesik konusning yon sirti *SOA* va *SOB* to'la konuslar yon sirtlari yuzlarining ayirmasi kabi topiladi:



21.10- chizma.



21.11- chizma.

$$S_{yon} = \pi R \cdot AS - \pi r \cdot SB = \pi R(AB + SB) - \pi r \cdot SB$$

yoki

$S_{yon} = \pi R \cdot AB + \pi(R - r)\, SB$. (10) $O_1B \parallel OA$ bo'lganligidan, $\Delta SO_1B \sim \Delta SOA$.

Shu sababli

$$\frac{OA}{O_1B} = \frac{AS}{SB}, \quad \frac{R}{r} = \frac{AB+SB}{SB}$$

va

$$\frac{R}{r} = \frac{l}{SB} + 1, \quad \frac{R-r}{r} = \frac{l}{SB}.$$

Bundan $SB = \frac{rl}{R-r}$ bo'ladi. Olingan qiymatlarni (10) ga keltirib qo'yamiz:

$$S_{yon} = \pi R l + \pi(R - r) \cdot \frac{rl}{R-r}. \quad S_{yon} = \pi(R + r)l.$$

Demak, biz kesik konus yon sirtining yuzi uning asoslari yig'indisining yarmi bilan yasovchisining ko'paytmasiga teng ekanligini isbot qildik.

Kesik konus to'la sirtining yuzi uning yon sirti yuzi va ikkita asosi yuzlarining yig'indisiga teng:

$$S_{to'la} = S_{yon} + S_1 + S_2$$

yoki

$$S_{to'la} = \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2. \quad (12)$$

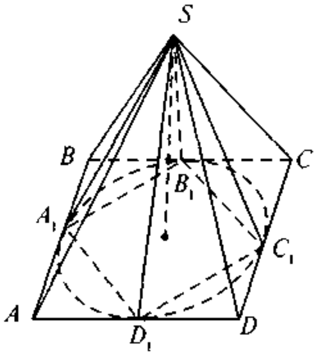
Konusning hajmi.

2 - teorema. ***Konusning hajmi asosining yuzi bilan balandligi ko*·paytmasining uchdan biriga teng.***

I s b o t i. Asosining yuzi *S,* balandligi *H* bo'lgan konus berilgan bo'lsin (21.12- chizma). Bu konusga ichki va tashqi *n* burchakli muntazam piramidalar chizamiz. Bu piramidalar asoslarining yuzlarini, mos ravishda, S_n va S'_n deb belgilasak, ularning hajmlari, mos ravishda, $\frac{1}{3}S_nH$ va $\frac{1}{3}S'_nH$ bo' ladi.
Ichki chizilgan piramida konusning ichida, konus esa tashqi chizilgan pira-midaning ichida joylashganligidan,

$$\frac{1}{3}S_n \cdot H < V < \frac{1}{3}S'_n \cdot H \quad (13)$$

bo'ladi. Yetarlicha katta *n* uchun S_n va S'_n lar *S* dan yetarlicha kichik farq qiladilar. Shunday qilib, yozilgan (13) qo'sh tengsizikning chap va o'ng qismi va, demak, ular orasida joylashgan K qiymat ham $\frac{1}{3}S \cdot H$ dan yetarlicha kichik farq qiladi.



21.12- chizma.

Bu faqat

$$V = \frac{1}{3}S \cdot H \quad (14)$$

bo'lganda o'rinli. Teorema isbotlandi.

2- n a t i j a . *Agar R — konus asosining radiusi bo 'Isa, uning hajmi*

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H \quad (15)$$

formula bo 'yicha hisoblanadi.
3- teorema. ***Balandligi H, asoslarining yuzlari S_1 va S_2 bo'lgan kesik konusning hajmi***

$$V = \frac{1}{3}H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right) \quad (16)$$

formula bo'yicha hisoblanadi.
I s b o t i. Berilgan kesik konusga ichki va tashqi *n* burchakli muntazam kesik piramidalar chizamiz (21.13- chizma). Bu kesik
piramidalar asoslarining yuzlari, mos ravishda, S_{1n}, S'_{1n} va S_{2n}, S'_{2n} bo'lsa, kesik konusning *V* hajmi uchun

$$V_1 < V < V_2 \quad (17)$$

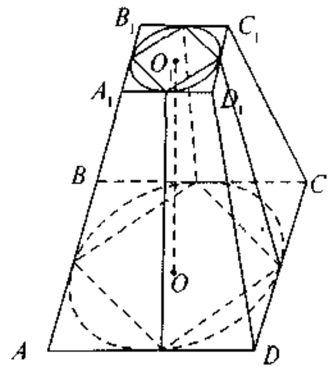
tengsizlikni yozish mumkin, bunda

$$V_1 = \frac{1}{3}H(S_{1n} + S'_{1n} + \sqrt{S_{1n}S'_{1n}})$$

va

$$V_2 = \frac{1}{3}H(S_{2n} + S'_{2n} + \sqrt{S_{2n}S'_{2n}})$$

bo'lib, mos ravishda, ichki va tashqi chizilgan kesik piramidalarning hajm-laridan iborat. Agar *n* cheksiz ortti- rilsa, V_1 va V_2 lar Kdan, shuningdek, S_{1n} va S_{2n} lar S_1 dan, S'_{1n} va S'_{2n} lar esa S_2 dan yetarlicha kichik farq qiladi. U holda kesik konusning hajmi (16) formula bo'yicha hisoblanishi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.



21.13- chızma.

3- n a t i j a . *Agar R va r, mos ravishda, kesik konusningpastki va yuqori asoslari radiuslari, H— uning balandligi bo 'Isa, kesik konus hajmini topish formulasi* (16)

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr) \quad (17)$$ *ko 'rinishda yoziladi.*

Sfera va shar

Ta'riflar va xossalar.

4- ta'rif. *Fazoda berilgan O nuqtadan berilgan masofada joylashgan nuqtalarning geometrik o'rniga* ***sfera*** *deyiladi* (21.14-chizma).

Bunda berilgan *0* nuqta — sferaning *markazi,* berilgan *R* masofa — uning *radiusi* deyiladi.

5-1 a ' r i f. *Fazoda berilgan O nuqtadan berilgan R masofadan katta bo'lmagan masofada joylashgan nuqtalarning geometrik o'rni* ***shar*** *deyiladi.*Bunda *O* — shaming *markazi, R* — shaming *radiusi* deyiladi (21.14- chizma).Agar *X*— sferaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, sfera ta'rifiga ko'ra, *OX=R* . Agar 7— shaming ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, ta'rifga ko'ra, $OY \le R$ bo'ladi. Shunday qilib, agar sfera va shar umumiy *O* markazga ega bo'lsa, har doim ι$OY \le OX$ bo'ladi. Shu sababli sfera sharning chegarasidan iborat va u *shaming sirti* deb ham ataladi. Shaming *OY<R* shartni qanoatlantiruvchi barcha *Y* nuqtalari uning *ichki nuqtalari* deyiladi.

Sfera markazi bo'lgan *O* nuqtani uning *X* nuqtasi bilan tutashtiruvchi *OX=R* kesma sfera va shaming *radiusi* deyiladi.

Sferaning markazidan o'tuvchi va uning ikki nuqtasini birlashtiruvchi kesma uning *diametri* deyiladi. Agar *D* — sfera diametri bo'lsa, ta'rifga ko'ra *D = 2R* bo'ladi.

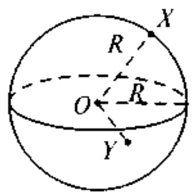
Fazoda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi va *R* radiusli sfera berilgan bo'lsin. Sfera markazining koordinatalarini *O(a; b; c)* kabi belgilaymiz. Agar *X*— sferaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, ta'rifga ko'ra *OX=R* bo'ladi. *X* ning koordinatalarini *X(x; y; z)* deb belgilasak, ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$$

yoki

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \quad (18)$$

ko'rinishdagi sferaning kanonik tenglamasini hosil qilamiz.



21.14- chizma.

Agar sferaning markazi koordinatalar sistemasi boshi bilan ustma-ust tushsa, (18) tenglama

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (19)

ko'rinishni oladi.

Shuni alohida e'tirof etish lozimki, ta'rifga muvofiq, markazi *0 (a; b; c)* nuqtada bo'lgan shar nuqtalarining koordinatalari har doim

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \le R^2$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

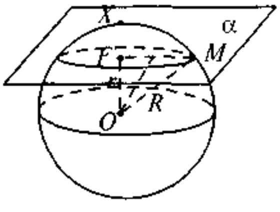
Endi sfera va shaming xossalariga to'xtalamiz.
4 - teorema. ***Shaming tekislik bilan har qanday kesimi doiradan iborat, doiraning markazi shaming markazidan kesuvchi tekislikka o'tkazilgan perpendikularning asosidir.***
I s b o t i. Shaming O markazidan kesim tekisligiga OF perpendikular o'tkazamiz (21.15- chizma). M nuqta sferaning kesuvchi α tekislikda yotgan ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. To'g'ri burchakli $\triangle OFM$ dan, Pifagor teoremasiga asosan,

$$MO^2 = FO^2 + FM^2$$

kelib chiqadi.
Agar X— shaming α tekislikda yotgan nuqtasi, R — shaming radiusi bo'lsa,

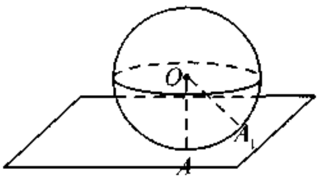
$$FX^2 \leq \sqrt{R^2 - OF^2}$$

bo'ladi va X nuqta markazi F nuqtada, radiusi $\sqrt{R^2 - OF^2}$ bo'lgan doiraga tegishli bo'ladi. Aksincha, bu doiraning ixtiyoriy nuqtasi sharga tegishli bo'ladi. Bu esa a tekislik va shar markazi F nuqtada bo'lgan doira bo'yicha kesishishini ko'rsatadi. Teorema isbotlandi.



21.15- chizma.

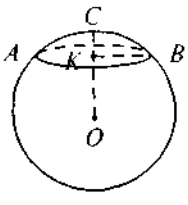
4 - n a t i j a . *Markazdan bir xil uzoqlikda joylashgan kesimlar teng bo 'ladi. Teng kesimlar markaidan bir xil uzoqlikda joylashadi.*
5 - n a t i j a . *Ikkita o 'zaro teng bo 'lmagan kesimlardan markazga yaqin joylashgani katta bo 'ladi va aksincha.*
6 - n a t i j a . *Kesim tekisligiga perpendikular diametr kesimning markazidan o 'ladi va aksincha.*
7 - n a t i j a . *Kesimlar ichida tekisligi shar markazidan o 'tgan kesim kattadir. Bu kesim katta doira deyiladi.*
6 -t a ' r i f. *Shar bilan bitta umumiy nuqtaga ega bo 'lgan tekislik* ***urinma tekislik*** *deyiladi.*



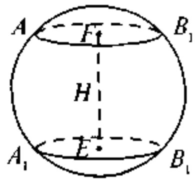
21.16- chizma.

5 - teorema. ***Sharga urinma tekislikning urinish nuqtasiga o'tkazilgan radius urinma tekislikka perpendikulardir.***
I s b o t i. Isbotlash teskarisini faraz qilish usuli bilan amalga oshiriladi. Markazi O nuqtada bo'lgan shar va α tekislik A nuqtada kesishsin (21.16- chizma). OA_1 kesma α tekislikka og'ma bo'lsin, deb faraz qilamiz.
U holda α tekislikka perpendikular bo'lgan OA_λ kesma mavjud bo'lishi kerak hamda $A_1 \in \alpha$ va $OA_1 < OA$ bo'ladi. Demak, A_j nuqta shar va α tekislikning umumiy nuqtasidan iborat. Shunday qilib, A nuqta shar va α tekislikning yagona umumiy nuqtasi emasligini ko'ramiz. Bunday bo'lsa, α tekislik urinma tekislik bo'lmaydi, bu esa teoremaning shartiga ziddir. Olingan qarama-qarshilik, farazimizning noto'g'ri ekanligini va $OA \perp \alpha$ bo'lishini tasdiqlaydi.
Teorema isbotlandi.
7 - t a ' r i f. *Shar bilan faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo 'lgan to'g'ri chiziq sharga* ***urinma*** *deyiladi.*
Sharga urinma — urinish nuqtasiga o'tkazilgan radiusga perpendikulardir.
Shar segment! va shar kamari.
8 -1 a ' r i f. *Shaming tekislik bilan kesilgan qismi* ***shar segmenti*** *deyiladi.*
Shar segmentining sirti sferik segment va shar segmentining asosi deb ataladigan doiradan tashkil topadi. Kesuvchi tekislik sharni ikkita shar segmentiga bo'ladi. Tekislikning shar sirti bilan kesishish

aylanasi *AB* segmentning *asosi,* kesim tekisligiga perpendikular radiusning $CK = H$ kesmasi uning *balandligi* deyiladi (21.17-chizma).



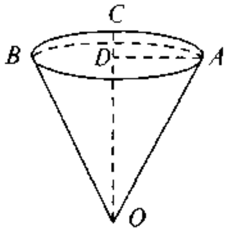
21.17- chizma.



21.18- chizma.

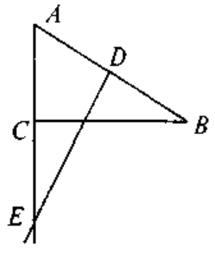
9 - t a ' r i f. *Shar sirtining ikkita parallel kesuvchi tekislik orasida joylashgan qismi* ***shar kamari*** deyiladi (21.18- chizma).
BundaA_1B_1 va A_2B_2 kesishish aylanalarishar kamarining *asoslari,* parallel tekisliklar orasidagi *ff=EF* masofa esa shar kamarining *balandligi* deyiladi.

10- t a ' r i f. *Shaming ikkita parallel tekislik bilan kesilgan va ular orasida joylashgan qismi* ***shar qatlami*** deyiladi.
11-ta'rif. *OAC doiraviy sektorni OC radius atrofida aylantirganda hosil bo'lgan jism* ***shar sektori*** *deyiladi* (21.19-chizma).



21.19- chizma.

Shar sektorining balandligi deb, mos shar segmentining baland-ligiga aytiladi, ya'ni, *CD = h, h* — shar segmentining balandligidir.
3. Sfera va uning qismlari sirtining yuzi. Sfera va uning qismlari sirtining yuzini topish uchun awalo quyidagi lemmani isbotlaymiz.
1 -1 e m m a . ***Uchtajism: konus, kesik konus va silindrlardan har birining yon sirti — jism balandligining radiusi yasovchining o'rtasidan o'"q bilan kesishguncha o'tkazilgan perpendikularning uzunligiga teng bo'lgan aylana uzunligiga ko*~paytmasiga tengdir.***
I s b o t i. 1. Konus to'g'ri burchakli ΔABCning *AC* katet



21.20- chizma.

atrofida aylanishidan hosil bo'lgan bo'lsin (21.20- chizma). Agar $AD=DB$ va $DE \perp AB$ bo'lsa, konusning yon sirti

$$S_{yon}=2\pi \cdot BC \cdot AD. \quad (20)$$

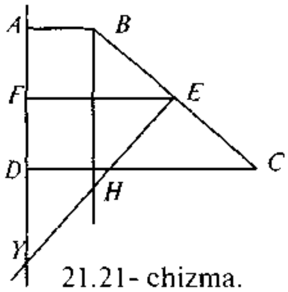
Bizda ikkita o'xshash to'g'ri burchakli uchburchaklarΔABC va ΔADE bor, chunk! ularda $\angle C=\angle D= 90^\circ$ va $\angle A$— umumiy. Ular tomonlarining roporsionalligidan,

$$\frac{BC}{ED} = \frac{AC}{AD} \text{ va } BC \cdot AD = ED \cdot AC$$

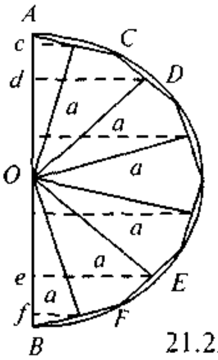
bo'ladi. U holda (20) tenglik, isbotlash talab qilingan,

$$S_{yon}= 2\pi \cdot ED \cdot AC \quad (21)$$

ko'rinishga keladi.



21.21- chizma.



21.22- chizma.

Kesik konus *ABCD* trapetsiyaning *AD* tomon atrofida aylanishidan hosil bo'lsin (21.21- chizma). Trapetsiyaning *EF* o'rta chizig'ini o'tkazamiz, u holda kesik konusning yon sirti

$$S_{yon} = 2\pi \cdot EF \cdot BC. \quad (22)$$

Endi $BH \perp DC$, $EY \perp BC$ to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Natijada, yana ikkita o'xshash to'g'ri burchakli ΔBHC va ΔFEY larni hosil qilamiz, ularda o'zaro perpendikular tomonli burchaklar sifatida $\angle FEY = \angle HBC$. Uchburchaklar tomonlarining proporsionalligidan,

$$\frac{EF}{BH} = \frac{EF}{BC} \text{ va } EF \cdot BC = BH \cdot EY = AD \cdot EY.$$

U holda, kesik konus yon sirti uchun (22) formula talab qilingan

$$S_{yon} = 2\pi \cdot EY \cdot AD \quad (23)$$

ko'rinishni oladi.

Silindr qaralganda, teoremada so'z borgan aylana uning asosi aylanasidan iborat bo'ladi. Demak, bu holda ham teorema o'rinli.

Sfera yarim aylananing diametr atrofida aylanishidan hosil bo'lsin. Bu yarim aylanaga tomonlari o'zaro teng, ya'ni muntazam ichki siniq chiziq chizamiz. Sfera sirtining yuzi sifatida, yarim aylanaga ichki chizilgan muntazam siniq chiziq tomonlarini cheksiz ikkilantirganda, uning yarim aylananing diametri atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt yuzi intiladigan limit qabul qilinadi.

6-teorema. ***Sfera sirtining yuzi katta doira aylanasi uzunligining diametrga ho'paytmasiga teng.***

I s b o t i. *ACDEFB* — berilgan yarim aylanaga ichki chizilgan muntazam siniq chiziq bo'lsin (21.22- chiziq). Yarim aylananing *O* markazidan siniq chiziqning tomonlariga perpendikularlar tushiramiz. Ular o'zaro teng bo'ladi, chunki siniq chiziq muntazam ko'pburchakning qismidan iborat. Perpendikularning uzunligini *a* deb belgilaymiz va siniq chiziqning*C, D, E, F* uchlaridan diametrga *cC, dD, βE, fF* perpendikularlar tushiramiz.

Bu siniq chiziqning aylanishidan hosil bo'lgan sirt, *AC,* C7),···tomonlarning aylanishidan hosil bo'lgan qismlardan tashkil topadi. Bu qismlar, konusning, kesik konusning yoki silindrning yon sirtlaridan iborat. Siniq chiziq tomonlari sonini orttirsak, *a* perpendikularning uzunligi aylananing *R* radiusiga intiladi. Shuning uchun

$$S_{sfera} = 2\pi R \cdot Ad + 2\pi R \cdot de + 2\pi R \cdot ef + 2\pi R \cdot fB$$

ypki

$$S_{sfera} = 2\pi R(Ad + de + ef + fb)$$

bo'ladi. Lekin *Ad + de + ef+fB* perimetr *2R* ga intiladi va shu sababli teoremada talab qilingan $S_{sfera} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$ (24) munosabat o'rinli.

8 - n a t ij a . *Segment sirtining yuzi uning balandligi bilan katta doira aylanasi uzunligi ko 'paytmasiga teng:*

$$S_{segm} = 2\pi R \cdot H.$$

9- n a t i j a . *Shar kamari sirtining yuzi uning balandligi bilan katta doira aylanasi uzunligi ko 'paytmasiga teng:*

$$S_{shar\ kam} = 2\pi R \cdot H.$$

10- n a t i j a . *Sharlar sirtlari yuzlarining nisbati ular radiuslari kvadratlarining nisbati kabidir.*

Shar va uning qismlari hajmi.

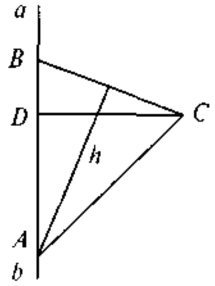
Dastlab quyidagi lemmani isbotlaymiz.

2- lemma. ***Agar*** ΔABC***, uchburchak tekisligida yotib, uning***

A uchi orqali o'"tuvchi va BC tomonini kesib o'tmaydigan ab o'q atrofida aylansa, bu aylanish natijasida hosil bo'ladigan jismning hajmi qarama-qarshi BC tomoni hosil qilgan sirt yuzining shu tomonga tushirilgan h balandlikning uchdan biriga ko'paytmasiga teng.

I s b o t i. Uchta holni qaraymiz.

1. *ab* aylanish o'qi *AB* tomon bilan ustma-ust tushsin (21.23- chizma). ΔABC ning AB tomon atrofida aylanishidan ikkita konus hosil



21.23- chizma.

qilamiz. Agar $CD \perp AB$ bo'lsa, bu konuslarning V_1 va V_2 hajmlari, mos ravishda,

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi CD^2 \quad BD \quad \text{va} \quad V_2 = \frac{1}{3}\pi CD^2 \cdot AD$$

bo'ladi. Unda aylanish jismining hajmi uchun

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot CD^2 \cdot BD + \frac{1}{3}\pi \cdot CD^2 \cdot AD,$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot CD^2(BD + AD) = \frac{1}{2}\pi \cdot CD^2 \cdot AB \quad (25)$$

ifodani olamiz. Uchburchakning *A* uchidan *EC* tomonga uchburchakning *h* balandligini o'tkazamiz. U holda

$$AB \cdot CD = C \cdot h = 2S_{\Delta ABC}$$

bo'ladi. Shunday qilib, aylanish jismining hajmi uchun hosil qilingan (25) ifoda

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot CD \cdot BD \cdot h \quad (26)$$

ko'rinishni oladi. Lekin π -*CD*· *BD* ko'paytma *BDC* konus yon sirtining yuziga teng:

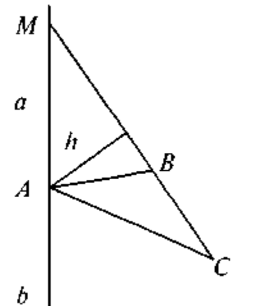
$$S_{\text{yon}} = \pi \cdot CD \cdot BD \; .$$

Shu sababli (26) formula talab qilingan

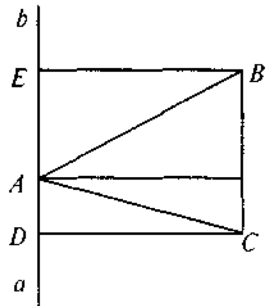
$$V = \frac{1}{3} S_{\text{yon}} \cdot h \quad (27)$$

ko'rinishni oladi.

2. *ab* o'q *A* nuqta orqali o'tib, *BC* tomonga parallel bo'lmasin (21.24- chizma). U holda aylanish jismining hajmi ΔAMC va ΔAMB laming aylanishidan hosil bo'lgan jismlar hajmlarining ayirmasiga teng bo'ladi. Birinchi holda isbotlanganiga ko'ra, (27)



21.24- chizma.



21.25- chizma.

formulani $V_{AMC} = \frac{1}{3} h \;\; S_{MC}$, bunda S_{MC} — konusning yon sirti va $V_{AMB} = \frac{1}{3} h \;\; S_{MB}$, bunda S_{MB} — konusning yon sirti, ko'rinishda yozib olamiz. Endi aylanish jismining hajmi talab qilingan

$$V_{ABC} = \frac{1}{3} h \;\; (S_{MC} - S_{MB}) = \frac{1}{3} h \cdot S_{BC}$$

ko'rinishni oladi, bunda S_{BC} — BC tomonning aylanishidan hosil bo'lgan sirtning yuzidir.

3. *ab* oʿq *BC* tomonga parallel bo'lsin (21.25- chizma). U holda aylanish jismining hajmi BC tomonning aylanishidan hosil bo'lgan silindrning hajmidan $\Delta\, ABE$ va $\Delta\, ACD$ laming aylanishidan

hosil bo'lgan ikkita konus hajmlarini ayirish natijasiga teng bo'ladi, ya'ni

$$V_{aj} = V_{BCDE} - V_{BAE} - V_{ADC}, \text{ bunda } BE \perp ED,\ CD \perp DE.$$

Hajmlar formulalaridan foydalansak, oxirgi ifoda

$$V_{aj} = \pi \cdot CD^2 \cdot DE - \frac{1}{3}\pi BC^2 \cdot EA - \frac{1}{3}\pi CD^2 \ AD$$

yoki

$$V_{aj} = \pi \cdot CD^2(DE - \frac{1}{3}(AE + AD) = \pi \cdot CD^2(ED - \frac{1}{3}ED) = \frac{2}{3}\pi CD^2 \cdot ED$$

ko'rinishni oladi. Lekin

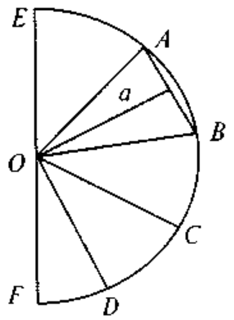
$$2\pi \cdot CD \cdot ED = S_{BC}$$

bo'lganligidan, talab qilingan

$$V_{aj} = \frac{1}{3}CD \cdot S_{BC} = \frac{1}{3}h \cdot S_{BS}$$

ifodani hosil qilamiz. Lemma isbotlandi.

Endi shar sektorining hajmi haqida so'z yuritamiz. *AOD* doiraviy sektorning *EF* diametr atrofida aylanishidan hosil bo'lgan shar sektorining hajmi sifatida, chetki *(OA* va *OD)* radiuslar va doiraviy sektorga ichki chizilgan muntazam *(ABCD)* siniq chiziq bilan chegaralangan ko'pburchakli sektorning aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmining, siniq chiziq tomonlari soni cheksiz ortgandagi limiti qabul qilinadi (21.26- chizma).



21.26- chizma.

7-teorema. ***Shar sektorining hajmi mos shar kamarl sirti (yoki mos segment sirti) yuzi bilan radiusning uchdan biri ko[1]"paytmasiga teng.***

I s b o t i. Shar sektori doiraviy *OAD* sektorning *EF* diametr atrofida aylanishidan hosil bo'lsin (21.26- chizma). Uning hajmini topish uchun *AD* yoyga tomonlari ixtiyoriy sondagi ichki muntazam *ABCD* siniq chiziq chizamiz. Bunda ko'pburchakli *OABCD* sektorning aylanishi natijasida qandaydir jisrn hosil bo'ladi, uning hajmini V_1 deb belgilaymiz. Bujismning hajmi *OAB, OBC, OCD* uchburchaklarning *EF* o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismlar hajmlarining yig'indisiga teng. Uchburchaklarning balandliklari ichki chizilgan siniq chiziqning apofemalariga tengdir. U holda lemmaga muvofiq

$$V_1 = S_{AB} \ \frac{a}{3} + S_{BC} \ \frac{a}{3} + \ldots = S_{ABCD} \ \frac{a}{3}$$

deb yozish mυmkin.

Endi siniq chiziq tomonlari sonini ikkilantiramiz. U holda *ABCD* sirt shar kamari *AD* ning sirtiga, apofema esa shaming radiusiga intiladi. Demak,

$$V = \lim V_1 = S_{AD} \cdot \frac{R}{3}$$

bo'ladi. Teorema isbotlandi.

8-teorema. ***Shaming hajmi uning sferasi sirti yuzi bilan balandligining uchdan biri ko""paytmasiga teng.***

I s b o t i. Aylanishi natijasida shar hosil qiladigan *ABCD* yarim doirani *AOB, BOC, COD* doiraviy sektorlarga bo'lamiz (21.27- chizma). U holda, isbotlanganiga ko'ra,

$$V_{AOB} = S_{AB} \cdot \frac{1}{3}R,$$

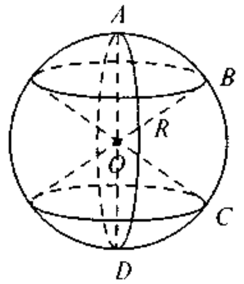
$$V_{BOC} = S_{BC} \cdot \frac{1}{3}R,$$

$$V_{COD} = S_{CD} \cdot \frac{1}{3}R.$$

Olingan ifodalarni qo'shib, shar hajmi uchun

$$V = (S_{AB} + S_{BC} + S_{CD}) \cdot \frac{1}{3} R = S_{ABCD} \frac{1}{3} R$$

Formulani hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.



21.27- chizma.

11 - n a t i j a . *Shar segment/ yoki shar kamarining balandligi H, shaming radiusi R bo'lsin. Shar sektori va shar hajmlari uchun*

$$V_{\text{shar sek}} = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot H, \quad V_{\text{shar}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \ (28)$$

formulalar o 'rinli.

9-teorema. ***Shar segmentining hajmi shunday silindrning hajmiga tengki, uning asosi radiusi segmentning balandligiga, balandligi esa shar radiusining segment balandligining uchdan biriga kamaytirilganiga teng, ya'ni***

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3} \cdot H \right),$$

bunda *H*— segmentning balandligi, *R*— shaming radiusi.

I s b o t i. Shar segment! doira *ABC* qismining *AD* diametr atrofida aylanishidan hosil bo'ladi (21.28-chizma). Uning hajmini, shar sektori hajmi vaΔCOBning aylanishidan hosil bo'lgan konus hajmi orasidagi ayirma sifatida topish mumkin:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi CB^2 \cdot CO.$$

Doirada o'zaro kesishuvchi vatarlarning xossasidan

$$CB^2 = AC \cdot CD \quad \text{yoki} \quad CB^2 = H(2R - H)$$

bo'ladi. U holda

$$CB^2 \cdot OC = H(2R - H)(R - H) = 2R^2 H - RH^2 - 2RH^2 + H^3 =$$

$$= 2R^2 H - 3H^2 R + H^3.$$

Olingan ifodani hajm formulasiga keltirib qo'yamiz:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi \left(2R^2 H - 3H^2 R + H^3 \right) = \frac{2}{3}\pi R^2 H + \pi RH^2 -$$

Teorema isbotlandi.

Prizma va silindr

1-t a' r i f. *Agar prizmaning asoslari silindr asoslariga ichki chizilgan bo 'Isa, prizma silindrga* ***ichki chizilgan*** *(silindr esa prizmaga* ***tashqi chizilgan)*** *deyiladi* (22.1- *a* chizma).

Agar: 1) prizma to'g'ri va 2) uning asosiga tashqi aylana chizish mumkin bo'lsa, prizmaga tashqi silindr chizish mumkin. Bundan uchburchakli to'g'ri prizmaga va ixtiyoriy muntazam prizmaga tashqi silindr chizish mumkinligi kelib chiqadi. Bunda prizmaning yon qirrasi tashqi chizilgan silindrning yasovchisidan iborat bo'ladi.

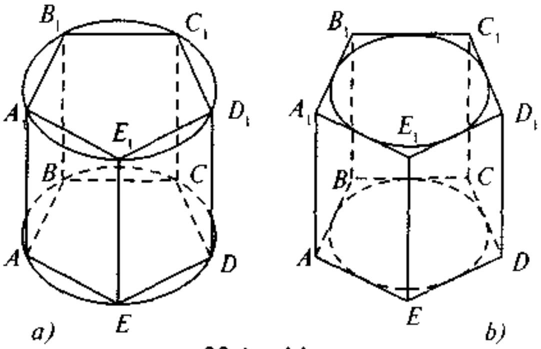
2- t a' r i f. *Agar silindrning asoslari prizma asoslariga ichki chizilgan bo 'Isa, silindr prizmaga* ***ichki chizilgan*** *(prizma esa silindrga* ***tashqi chizilgan)*** *deyiladi (22.1- b* chizma).

Shunday qilib, agar: 1) prizma to'g'ri va 2) prizmaning asosiga ichki aylana chizish mumkin bo'lsa, prizmaga ichki silindr chizish mumkin. Bundan ixtiyoriy uchburchakli to'g'ri prizma va ixtiyoriy muntazam prizmaga ichki silindr chizish mumkinligi kelib chiqadi.

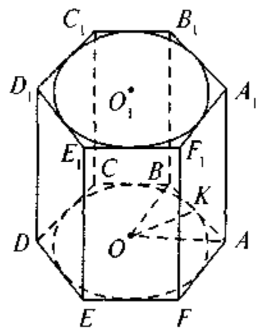
1- m a s a 1 a. Oltiburchakli muntazam prizma va unga ichki chizilgan silindr hajmlarining nisbatini toping.

Yechilishi. O — prizma asosiga ichki chizilgan aylananing markazi bo'lsin (22.2- chizma). U holda ΔAOB — teng tomonli bo'ladi. $AB = a$ bo'lsin. Bu uchburchakning OK balandligini topamiz, u bir vaqtning o'zida silindr asosining radiusi hamdir, ya'ni

$$OK = r = a\sin 60^\circ \quad \text{yoki} \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



22.1- chizma.



22.2- chizma.

ΔAOBning yuzi $\quad S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ bo'lganligidan, muntazam oltiburchakning yuzi

$$S_{\text{prizma asos}} = 6\cdot S_1 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Prizmaning hajmini topamiz:

$$V_{\text{prizma}} = S_{\text{prizma asos}}\cdot H\,\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\;H$$

Silindrning hajmi endi ularning nisbatini topamiz:

$$V_{\text{silindr}} = S_{\text{silindr asos}}\cdot H = \pi r^2 H \quad \text{yoki} \quad V_{\text{silindr}} = \frac{3a^2\pi}{4}\cdot H$$

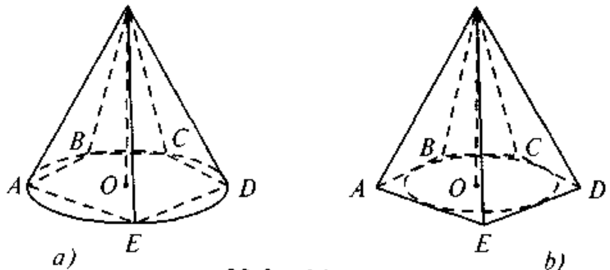
$$\frac{V_{\text{prizma}}}{V_{\text{silindr}}} = \frac{\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\,H}{\frac{3a^2\pi}{4}\cdot H} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}.$$

J a v o b: $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$.

Konus va piramida

3- t a' r i f. *Agar: 1) piramidaning uchi konusning uchi bilan ustma-ust tushsa va 2) piramidaning asosi konus asosiga ichki chizilgan bo'lsa, piramida konusga* ***ichki chizilgan*** *(konus esa piramidaga* ***tashqi chizilgan)*** *deyiladi.*

Konus — to'g'ri doiraviy konus bo'lganligidan, konusga ichki chizilgan piramida ta'rifiga ko'ra, ularning balandliklari ustma-ust tushadi va piramidaning har bir qirrasi konusning yasovchisidan iborat bo'ladi. Demak, piramidaga tashqi konus chizish uchun piramidaning yon qirralari teng bo'lishi shart, ya'ni konusga har doim ichki muntazam piramida chizish mumkin (22.3- *a* chizma).



22.3- chizma.

4-1 a' r i f. *Agar: 1) piramidaning uchi konusning uchi bilan ustma-ust tushsa va 2) piramidaning asosi konusning asosiga tashqi chizilgan bo'lsa, piramida konusga* ***tashqi chizilgan*** *(konus esa piramidaga* ***ichki chizilgan)*** *deyiladi.*
Bundan ixtiyoriy muntazam piramidaga ichki konus chizish mumkinligi kelib chiqadi (22.3- *b* chizma).
Konusga tashqi chizilgan piramidaning har bir yog'i konus sirtiga uning yasovchisi bo'yicha urinadi.
2- m a s a 1 a. Konusga yon qirrasi asos tekisligiga α burchak ostida og'gan uchburchakli muntazam piramida ichki chizilgan. Piramida asosining tomoni *a* ga teng bo'lsa, konusning hajmini hisoblang.
Y e c h i 1 i s h i. Konus asosining radiusi *R,* balandligi *H* bo'lsa, uning hajmi

$$V_{\text{konus}} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$$

formula bo'yicha hisoblanadi.
S uch piramida va konus uchun umumiy bo'lganligidan, ularning *SO — H* balandligi ham umumiy.
Uchburchakli muntazam piramidaning asosi ΔABC (22.4- chizma) aylanaga ichki chizilgandir. Biz sinuslar teoremasini qo'llaymiz:

$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2R, \text{ bundan, } R = \frac{a}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Endi to'g'ri burchakli ΔAOS ni qaraymiz. $AO = R$, $\angle SAO = \alpha$ bo'lganligidan,

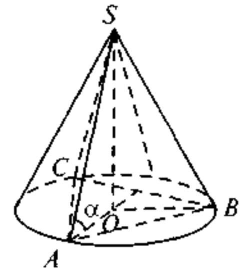
$$H = SO = AO \cdot \text{tg}\alpha \quad \text{yoki} \quad H = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \text{tg}\alpha.$$

Demak, konusning hajmi

$$V_{\text{konus}} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \text{tg}\alpha \quad \text{yoki} \quad V_{\text{konus}} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{27} \cdot \text{tg}\alpha.$$

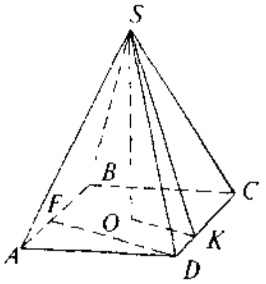
J a v o b: $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{27} \cdot \text{tg}\alpha.$

3- m a s a 1 a. Asosi rombdan iborat piramidaga konus, ularning uchlari uctma-ust tushadigan qilib, ichki chizilgan. Romb-ning tomoni *a,* o'tkir burchagi α, konusning yasovchisi va balandligi orasidagi burchagi φ bo'lsa, piramida va konus bilan chegaralangan shaklning hajmini hisoblang.



22.4- chizma.

Y e c h i 1 i s h i. Shartga ko'ra, $AB = BC = CD = DA = a$, $\angle BAD = \angle BCD = \alpha$, $\angle OSK = \varphi$ (22.5- chizma). *D* uchdan rombning *DF* balandligini o'tkazamiz. Hosil bo'lgan to'g'ri burchakli ΔAFD dan *FD = AD* · sin α = *a* · sinα bo'lishi kclib chiqadi. Rombning balandligi unga ichki chizilgan aylananing diametriga tengligidan,uning radiusi $r = OK = \frac{1}{2}$<3sinσ bo'ladi.



22.5- chizma.

To'g'ri burchakli ΔSOK dan piramidaning 50 = *H* balandligini topamiz.

$$H = OK \cdot \text{ctg}\varphi \quad \text{yoki} \quad H = r\ \text{ctg}\varphi = \frac{a}{2}\sin\alpha\,\text{ctg}\varphi.$$

Endi piramida va konusning hajmlarini hisoblaymiz. Ular asoslarining yuzlari

$$S_{\text{konus asos}} = \pi r^2 = \frac{\pi}{4}a^2\sin^2\alpha, \quad S_{\text{piramida asos}} = a^2\sin\alpha.$$

Piramida va konus orasida joylashganjismning hajmi piramida va konus hajmlari orasidagi ayirmaga teng bo'ladi:

$$V = V_{\text{piramida}} - V_{\text{konus}} = \frac{1}{3}a^2 \sin\alpha \cdot H - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{3}a^2 \sin^2\alpha \cdot H$$

Yoki

$$V = \frac{a^2}{24}\sin\alpha \cdot H(4 - \pi\sin\alpha).$$

Demak,

$$V = \frac{a^2}{24}\sin^2\alpha \cdot \text{ctg}\varphi(4 - \pi\sin\alpha).$$

J a v o b: $\frac{a^3}{24}\sin^2\alpha \cdot \text{ctg}\varphi(4 - \pi\sin\alpha).$

Ichki chizilgan va tashqi chizilgan sferalar

Planimetriyadagiga o'xshash ba'zi ta'riflarni keltiramiz.

5- t a' r i f. *Agar sfera ko 'pyoqli burchakning barcha yoqlariga urinsa, u ko'pyoqli burchakka **ichki chizilgan** deyiladi.*

6- t a' r i f. *Agar sfera ko 'pyoq yog'larining barchasiga urinsa, u ko'pyoqqa **ichki chizilgan** deyiladi. Bu holda, labiiyki, ko'pyoq sferaga **tashqi chizilgan** deyiladi.*

7-1 a' r i f. *Agar ko'pyoqning barcha uchlari sferada yotsa, sfera ko'pyoqqa **tashqi chizilgan** deyiladi.*

8- t a' r i f. *Agar sfera to 'g'ri doiraviy silindr yon sirtiga aylana bo 'ylab hamda uning asoslariga urinsa, u silindrga **ichki chizilgan** deyiladi. Bunda silindr sferaga **tashqi chizilgan** deyiladi.*

9-t a' r i f. *Agar sfera to'g'ri doiraviy konusning asosiga urinsa hamda uning yon sirtiga aylana bo 'ylab urinsa, u konusga **ichki chizilgan** deyiladi. Bunda konus sferaga **tashqi chizilgan** deyiladi.*

10-1 a' r i f. *Agar to 'g'ri doiraviy silindr asoslarining aylanalari sferada yotsa, sfera silindrga **tashqi chizilgan** deyiladi. Bunda silindr sferaga **ichki chizilgan** deyiladi.*

11-t a' r i f. *Agar to'g'ri doiraviy konusning uchi va asosi aylanasi sferada yotsa, sfera konusga **tashqi chizilgan** deyiladi.*

12- t a' r i f. *Kesik piramida asoslarining uchlari shar sirtiga (sferaga) tegishli bo 'Isa, shar ushbu kesik piramidaga **tashqi chizilgan** deyiladi.*

13-t a' r i f. *Agar shar kesik piramidaning asosiga va yon sirtiga urinsa, u kesik piramidaga **ichki chizilgan** deyiladi. Shaming diametri kesik piramidaning balandligiga teng bo 'ladi.*

14-1 a' r i f. *Agar shar to'g'ri doiraviy kesik konusning asoslariga va yon sirtiga urinsa, u kesik konusga **ichki chizilgan** deyiladi.*

Ixtiyoriy jismga ichki chizilgan sferaning, prizma yoki silindrga tashqi chizilgan sferaning markazi shu jismlarning ichida yotadi. Piramida yoki konusga tashqi chizilgan sferaning markazi bu jismlarning ichida yoki ulardan tashqarida, yoki ularning sirtida ham yotishi mumkin.

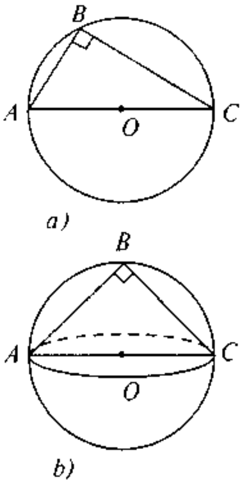
Aytilganlarni namoyish qilish uchun uchburchak va unga tashqi chizilgan aylananing uchta holini hamda to'g'ri doiraviy konus va unga tashqi chizilgan sfera uchun mumkin bo'lgan imkoniyatlarni qarab o'tamiz.

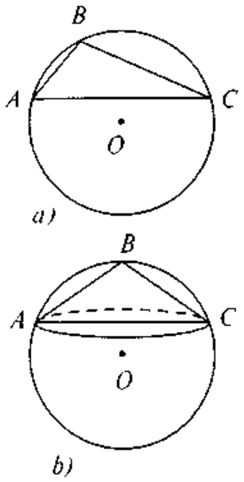
1. Agar uchburchak to'g'ri burchakli bo'lsa, unga tashqi chizilgan aylananing markazi uchburchakning tomonida yotadi (22.6- αchizma).

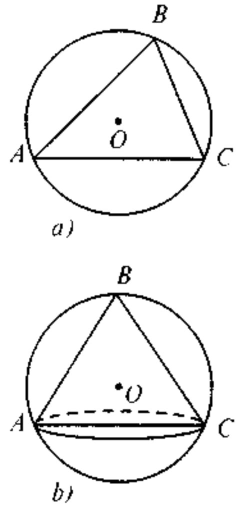
Agar to'g'ri doiraviy konusning o'q kesimida teng yonli to'g'ri burchakli uchburchak hosil bo'lsa, konusga tashqi chizilgan sferaning markazi konusning sirtida yotadi (22.6- *b* chizma).

2. O'tmas burchakli uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi uchburchakning tashqarisida yotadi (22.7- *a* chizma).

Agar to'g'ri doiraviy konusning o'q kesimi teng yonli o'tmas burchakli uchburchakdan iborat bo'lsa, konusga tashqi chizilgan

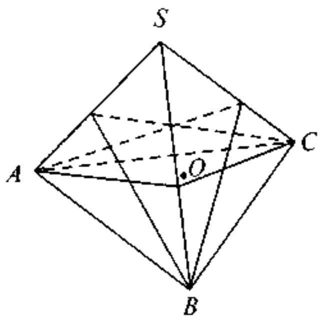






22.6- chizma. 22.7- chizma. 22.8- chizma.

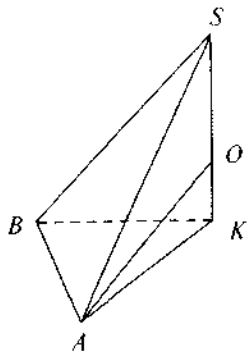
sferaning markazi konusdan tashqarida yotadi (22.7- *b* chizma).
3. O'tkir burchakli uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi uchburchakning ichida yotadi (22.8- *a* chizma).
To'g'ri doiraviy konusga tashqi chizilgan sferaning markazi, konusning o'q kesimi teng yonli o'tkir burchakli uchburchakdan iborat bo'lganda, konus ichida yotadi (22.8- *b* chizma).
Qachon piramidaga sferani ichki chizish mumkin? Qachon piramidaga sferani tashqi chizish mumkin? Piramidaga ichki va tashqi chizilgan sferaning markazi qanday topiladi? Ushbu savollarga javob topish uchun ba'zi teoremalarni qaraymiz.
1-teorema. ***Agar piramidaga shar ichki chizilgan bo'lsa, uning markazi piramidaning barcha ikki yoqli burchaklari bissektor tekisliklarining kesishish nuqtasi bo'ladi.***
I s b o t i. 5>iβCuchburchakli pira-midani qaraymiz (22.9- chizma). Piramida ikki yoqli burchaklarining bissektor tekisliklarini yasaymiz. *SABC* ikki yoqli burchakni qaraymiz. Ikki yoqli burchakning chiziqli burchagini yasaymiz va chiziqli burchakning bis-sektrisasiiii yasaymiz. *AB* qirra va yasal-gan bissektrisa orqali tekislik o'tkaza-miz, ana shu tekislik berilgan ikki yoqli burchakning bissektor tekisligi bo'ladi.



22.9- chızma.

Bissektrisaning nuqtalari burchakning tomonlaridan teng uzoqlikda joylashganligidan, bissektor tekislikning nuqtalari ham ikki yoqli burchak tomonlaridan teng uzoqlikda jo\lashadi. Agar qolgan ikki yoqli burchaklarning bissektor tekisliklarini o'tkazsak, ular bitta *O* nuqtada kesishadi. *O* nuqta piramidaning barcha yoqlaridan bir xil uzoqlikda joylashib, piramidaga ichki chizilgan sferaning markazi bo'ladi. Bissektor tekisliklarning kesishish nuqtasi yagona bo'lganligidan, uchburchakli piramidaga ichki chizilgan sfera yagonadir. Teorema isbotlandi.
1- n a t i j a. *Agar ixtiyoriy piramidada yuqoridagiga o'xshash yasashlar bajarganda o/ingan bissektor tekisliklar bitta nuqtada kesishsa, piramidaga ichki chizilgan shar mavjud va u yagonadir.*
2- n a t i j a. *Agar piramidaning asosiga ichki aylana chizish mumkin bo'lib, piramidaning uchi shu aylananing markaziga proyeksiyalansa, bu piramidaga ichki shar chizish mumkin va u yagonadir.*
Shuni e'tirof etish kerakki, muntazam piramidaga ichki chizilgan shaming markazi piramidaning balandligida yotadi.

2- t e o r e m a. ***Prizmaga tashqi sfera chizish mumkin bo'lishi uchun uning to'g*'ri bo'Hshi va asosida yotuvchi ko^pburchakka tashqi aylana chizish mumkin bo'lishi zarur va yetarli.***
3-teorema. ***Prizmaga ichki sfera chizish mumkin bo'lishi uchun prizmaning ofq kesimiga ichki aylana chizish vaprizmaning balandligi shu aylananing diametriga teng bo'Hshi zarur va yetarli.***
4- t e o r e m a. ***Piramidaga tashqi chizilgan sferaning mavjud bo'lishi uchun uning asosiga tashqi chizilgan aylananing mavjud bo'lishi zarur va yetarli.***
Oxirgi teoremadan:
1) ixtiyoriy uchburchakli piramidaga shar tashqi chizilishi mumkinligi,
2) *n* burchakli muntazam piramidaga shar tashqi chizilishi mumkinligi kelib chiqadi.
5-teorema. ***Agar piramidaga shar tashqi chizilgan bo'lsa, uning markazi piramidaning qirralari orqali, qirralarning o'"rtasidan ularga perpendikular qilib o'tkazilgan barcha tekisliklarning kesishish nuqtasidan iborat.***
I s b o t i. Haqiqatan, piramidaning bitta qirrasiga yopishgan ikkita uchidan teng uzoqlikda joylashgan ixtiyoriy nuqta, piramidaning shu qirrasiga perpendikular ravishda uning o'rtasi orqali o'tkazilgan tekislikda yotadi. Shu sababli tashqi chizilgan shaming markazi, piramidaning barcha uchlaridan teng uzoqlikda joylashgan holda, shu tekislikning harbirida yotishi kerak, ya'ni shu tekisliklarning kesishish nuqtasi bo'ladi. Teorema isbotlandi.
Piramidaga tashqi chizilgan shaming markazi piramidaning ichida ham, undan tashqarida ham, uning sirtida ham yotishi mumkin. Muntazam piramidaga tashqi chizilgan shaming markazi uning balandligida yoki balandlikning asos tekisligidan tashqaridagi davomida yotadi.
Endi shaming boshqa jismlar bilan kombinatsiyalariga doir masalalar yechamiz.



22.10- chizma.

4- m a s a 1 a. *n* burchakli piramidaning yon qirrasi *b* ga, piramidaning balandligi *h* ga teng. Tashqi chizilgan sferaning radiusini toping.
Y e c h i 1 i s h i. Piramidaning *n* qismini alohida ajratamiz. Agar $SK = h$ piramidaning balandligi bo'lsa, *SABK* piramidaga ega bo'lamiz (22.10-chizma), bunda $SA = SB = b$, $SK = h$. Piramidaga tashqi chizilgan sferaning markazi piramidaning *SK* balandligida yotadi, $SO = AO$. To'g'ri burchakli ΔSAK dan

$$AK = \sqrt{SA^2 - SK^2} = \sqrt{b^2 - h^2}$$

bo'lishini topamiz.
To'g'ri burchakli ΔAOK dan:

$$AO^2 = AK^2 + OK^2, \quad R^2 = b^2 - h^2 + (h - R)^2,$$

u holda, radius uchun

$$R = \frac{b}{2h}$$

ifodani olamiz.

J a v o b: $\frac{b}{2h}$.

Hosil bo'lgan formuladan foydalanib, yon qirralari teng bo'lgan (jumladan, muntazam bo'lgan) ixtiyoriy piramidaga tashqi chizilgan sferaning radiusini aniqlash mumkin.